

**Lösningsföreläsning till tentamen i Matematik II, 5B1116, för Bio,E,K,ME
Och 5B1136 för I. Måndag den 27/02/2006 kl 08-13.00**

1. Gauss elimination ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & 9 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & k \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 10 & 12 \\ 0 & -5 & -5 & k-10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & k-4 \end{array} \right), \text{ icketriviala lösningar om}$$

$k = 4$ ger t ex med $z = t, y = 6/5 - t, x = 7/5 + 2t$

Svar: $z = t, y = 6/5 - t, x = 7/5 + 2t$

$$2. \text{ Kedjeregeln } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \text{ ger med } \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}(x + y) \\ v = \frac{1}{2}(x - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial v} \end{cases} \text{ och } x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{u+v}{2} \right) \left[\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right] - \left(\frac{u-v}{2} \right) \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right] = v \frac{\partial f}{\partial u} + u \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\text{Svar: } x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = v \frac{\partial f}{\partial u} + u \frac{\partial f}{\partial v}.$$

3. Låt $P_0 = (8, 2, 6)$, vi söker den punkt $P = (x, y, z)$ som ligger i planet så att $|\vec{PP}_0|$ är minimal. Detta ger att $\vec{PP}_0$ är vinkelrätt mot planet $6x - 3y + 2z - 5 = 0$ med normalen $\vec{n} = (6, -3, 2)$.

$$\begin{cases} \vec{PP}_0 = t\vec{n} \\ 6x - 3y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x - 8, y - 2, z - 6) = t(6, -3, 2) & (1) \\ 6x - 3y + 2z - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x = 8 + 6t, y = 2 - 3t, z = 6 + 2t \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow t = -1$$

Sätt in $t = -1$ i sambandet (3)

Svar: Den sökta punkten är $(x, y, z) = (2, 5, 4)$.

4. Sätt $\vec{F}(x, y, z) = (u, v)$, där $u = x + 2y - 3z - 4, v = x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 14$ och $\vec{F}(3, 2, 1) = \vec{0}$.

$\vec{F}(x, y, z) = \vec{0}$ definiera en kurva i $\mathbb{R}^3$. Implicita funktionssatsen ger att kurvan är kontinuerligt deriverbar och kan parametriseras med $x = x, y(x), z(x)$ kring $(3, 2, 1)$ om

$$\det \left(\frac{d\vec{F}}{d(y, z)}(3, 2, 1) \right) \neq 0.$$

$$\det \left(\frac{d\vec{F}}{d(y, z)}(3, 2, 1) \right) = \det \left(\frac{d(u, v)}{d(y, z)}(3, 2, 1) \right) = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4y & -6z \end{pmatrix} (3, 2, 1) = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$$

Svar: Ja.

5. Eventuella lokala extrempunkter ges av

$$\nabla f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12 = 0 \Rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$$

Vi har funnit fyra kandidater $(1, 2), (-1, -2), (1, -2), (-1, 2)$. Hessianmatrisen

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \text{ som är en diagonalmatris med egenvärden } \lambda = 6x, 6y$$

För $(-1, 2), (1, -2)$ ger att egenvärdena $\neq 0$ och har olika tecken $\Rightarrow$ sadelpunkter.

För $(1, 2)$ ger att egenvärdena $\neq 0$ och är båda positiva $\Rightarrow$ minipunkt

För $(-1, -2)$ ger att egenvärdena $\neq 0$ och är båda negativa $\Rightarrow$ maximipunkt

Svar: lokalt mini $f(1, 2) = 2$ och lokalt max $f(-1, -2) = 38$

6. Matrisen A är symmetrisk och detta ger att det finns en ON-matris C bestående av egenvektorer till A som diagonalisera A dvs $C^T A C = D$

$$\text{Egenvärdena ges av } \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda((1 - \lambda)(\lambda - 6) = 0 \text{ som ger att } \lambda = 0, 1, 6$$

Egenvektorer

$$\lambda = 0, \vec{u} = (x, y, z)^T, (A - 0E)\vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{dvs } \vec{u} = t(1, -2, 1)^T, \vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T$$

$$\lambda = 1, \vec{u} = (x, y, z)^T, (A - 1E)\vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$$

$$\text{dvs } \vec{u} = t(2, 1, 0)^T, \vec{e}_2 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)^T$$

$$\lambda = 6, \vec{u} = (x, y, z)^T, (A - 6E)\vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z + 5x = 0 \\ -5y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{dvs } \vec{u} = t(1, -2, -5)^T, \vec{e}_3 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -2, -5)^T$$

$$\text{svar: } C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$p(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 4z^2) + xy + 2xy + 2yz - x + 4z + 5$$

$$\text{Obs! } p(1, 1, 1) = f(1, 1, 1) = 10$$

7. a. f är kontinuerlig på ellipsen som är en sluten och begränsad mängd $\Rightarrow f$ antar största och minsta värdet på ellipsen.

b. Bilda Lagranges funktion $L(x, y, t) = x + y + t(2x^2 + y^2 - 6)$ extrempunkterna ges då av

$$\nabla L = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 4tx = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2ty = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t} = 2x^2 + y^2 - 6 = 0 \quad (1) \end{cases},$$

$$y \frac{\partial L}{\partial x} - 2x \frac{\partial L}{\partial y} = y + 4txy - 2x - 4txy = 0 \Rightarrow y = 2x$$

som sättas in (1) ger $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Vi får punkterna $(x, y) = (-1, -2), (1, 2)$ och extremvärdena

$$f(1, 2) = 3 \quad \& \quad f(-1, -2) = -3$$

Singulära fallet då $\nabla g = (4x, 2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ som inte ligger på ellipsen.

Svar: 3 & -3

8. a. Tangentplanetets ekvationen ges av $\nabla f(1, 1, 1) \bullet (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$, där (x, y, z) är en godtycklig punkt på tangentplanet.

$$\nabla f = (1 - \sin(x + y - 2z), 2 - \sin(x + y - 2z), 6 - 2\sin(x + y - 2z)) \Rightarrow \nabla f(1, 1, 1) = (1, 2, 6)$$

$$\text{Detta ger } (1, 2, 6) \bullet (x - 1, y - 1, z - 1) = x + 2y + 6z - 9 = 0$$

$$\text{Delsvar: } x + 2y + 6z - 10 = 0$$

$$b. \cos(x + y - 2z) + x + 2y + 6z = \left[\begin{matrix} x = h + 1, y = k + 1, z = l + 1 \\ (x, y, z) \rightarrow (1, 1, 1) \Leftrightarrow (h, k, l) \rightarrow (0, 0, 0) \end{matrix} \right] =$$

$$\cos(h + k - 2l) + h + 2k + 6l + 9 = \left[\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \text{restterm} \right] =$$

$$1 - \frac{1}{2}(h + k - 2l)^2 + h + 2k + 6l + 9 + \text{restterm} =$$

$$h + 2k + 6l + 10 - \frac{1}{2}(h^2 + k^2 + 4l^2 - 2hk - 4hl - 4kl) + \text{restterm}$$

Taylorpolynomet av grad 2 ges då av

$$p(x, y, z) = (x - 1) + 2(y - 1) + 6(z - 1) + 10$$

$$- \frac{1}{2}((x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 4(z - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 1) - 4(x - 1)(z - 1) - 4(y - 1)(z - 1))$$

som kan skrivas (Ej nödvändig)

9.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & x & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & x \end{vmatrix} = [\text{addera de (n-1) första kol till den sista}] = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & . & . & . & x+n-1 \\ 1 & x & 1 & . & . & . & x+n-1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & x+n-1 \end{vmatrix} =$$

$$(x+n-1) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & x & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \end{vmatrix} = [\text{multiplicera kol n med -1 och addera till de övriga}] =$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & x-1 & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{vmatrix} = [\text{Vi får determinant till en övertrangel matris}] =$$

$$= (x+n-1)(x-1)^{n-1}$$

Svar: $x=1, x=1-n$

10. Diagonalisera matrisen A med en matris C bestående av egenvektorer till A

Eigenvärdena ges av

$$\begin{vmatrix} -21-\lambda & 75 \\ -10 & 34-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \lambda = 4, 9$$

Egenvektorn $\vec{u} = (x, y)^T$ till $\lambda=4$ löser $(A - 4E)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow \vec{u} = (3, 1)^T$

Egenvektorn $\vec{v} = (x, y)^T$ till $\lambda=9$ löser $(A - 9E)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow -2x + 5y = 0 \Rightarrow \vec{v} = (5, 2)^T$

$$\text{Matrisen } C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, CC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi har $C^{-1}AC = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = G^2 \Rightarrow \text{t ex } G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, och den sökta matrisen B sådan att

$$B^2 = A \Rightarrow B = CGC^{-1}$$

$$\text{Dvs } B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kontroll } B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-30 & -45+120 \\ 6-16 & -30+64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 75 \\ -10 & 34 \end{pmatrix} = A$$