

Tentamensskrivning, 2006-02-27 kl. 8.00-13.00
5B1116, Matematik 2 för Bio1, E1, K1, ME1 och Media1
5B1136, Matematik 2 för I1

Gränser för betygen 3, 4 och 5 är 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm konstanten k så att följande ekvationssystem får icke-triviala lösningar, (3 p)
samt bestäm dessa.

$$\begin{cases} x + 3y + z &= 5 \\ -x + 7y + 9z &= 7 \\ 2x + y - 3z &= k \end{cases}$$

2. I funktionen f från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ ersättes de oberoende variablerna x, y med hjälp av transformationen (3 p)

$$\begin{cases} x &= u + v \\ y &= u - v \end{cases}$$

Uttryck $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}$ i de nya variablerna u och v . Funktionen f antas ha kontinuerliga partiella derivator av första ordningen. (3 p)

3. Vilken punkt i planet $6x - 3y + 2z - 5 = 0$ ligger närmast punkten $(8, 2, 6)$? (3 p)

4. Avgör om ekvationerna (3 p)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ x^2 + 2y^2 - 3z^2 &= 14 \end{cases}$$

definierar deriverbara funktioner $y = y(x)$, $z = z(x)$ i någon omgivning av lösningspunkten $(3, 2, 1)$.

5. Bestäm alla lokala extremvärden till (3 p)

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$

6. A är matrisen

(4 p)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ortogonal (ON-) matris C och en diagonal matris D så att $D = C^T A C$.

7. Betrakta funktionen $f(x, y) = x + y$ och ellipsen $2x^2 + y^2 - 6 = 0$.

a. Förklara (ange en sats) varför man i förväg kan påstå att f antar ett största och ett minsta värde på ellipsen. (1p)

b. Bestäm dessa värden. (3p)

8. Betrakta funktionen $F(x, y, z) = \cos(x + y - 2z) + x + 2y + 6z$.

a. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $F(x, y, z) = 10$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

b. Bestäm Taylorpolynomet för F av grad 2 kring punkten $(1, 1, 1)$ (2p)

9. Lös ekvationen

(4 p)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix} = 0.$$

där determinanten är av ordning n ($n \geq 2$).

(Om du kan lösa ekvationen för $n = 3, 4$ får du delpoäng.)

10. Finn en matris B sådan att $B^2 = A$, där

(4 p)

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 75 \\ -10 & 34 \end{pmatrix}$$

Ledning: Finn en matris C sådan att $D = C^{-1} A C$ är diagonal. Finn sedan G så att $G^2 = D$. Observera att $(C G C^{-1})^2 = C G^2 C^{-1}$.