

**Lösningar till tentamensskrivning, 2006-06-08, 5B1116 och 5B1136,
Matematik II för Bio, E, I, K, ME och Media**

$$1. \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ger}$$

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}. \quad \text{Alltså}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -17 & 7 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}}}$$

Anm: matrisinverteringarna underlättas här av att determinaterna för bägge matriserna i vänsterledet är 1.

2. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x) = x^4 - 2xy + y^2$ skall bestämmas.

Stationära punkter uppfyller systemet $f'_x = 0$, $f'_y = 0$:

$$f'_x = 4x^3 - 2y = 0$$

$$f'_y = -2x + 2y = 0$$

Man får $x = y$ och $2x^3 = x$ vilket ger $x = 0$ eller $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ som ger de stationära punkterna $(0,0)$ och $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Undersökning av de stationära punkternas karaktär ($AC - B^2$ -metoden) :

	$(0,0)$	$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$
$A = f''_{xx} = 12x^2$	0	6	6
$B = f''_{xy} = -2$	-2	-2	-2
$C = f''_{yy} = 2$	2	2	2
$AC - B^2$	-4	8	8
	sadel	lok. min ($A > 0$)	lok. min ($A > 0$)

Svar: Punkterna $\underline{\underline{(x,y) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}}$ är lokala minimipunkter som ger f värdet $-\frac{1}{4}$.

3. Planet V: $2x - 3y + z = 0$ har normalvektorn $\bar{n} = (2, -3, 1)$.

Linjen L: $\bar{r} = (2 + t, 3 - t, 2t) = (2, 3, 0) + t(1, -1, 2)$ har riktningsvektorn $\bar{v} = (1, -1, 2)$.

Det sökta planet W skall innehålla L och vara vinkelrätt mot V. Man får alltså en normalvektor $\bar{m}$ till W genom $\bar{m} = \bar{n} \times \bar{v} = (2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1)$.

Punkten $(2, 3, 0)$ ligger på L och alltså i W.

W:s ekvation är alltså $\bar{m} \cdot (\bar{r} - \bar{a}) = 0$ eller $\bar{m} \cdot \bar{r} = \bar{m} \cdot \bar{a} = (-5, -3, 1) \cdot (2, 3, 0) = -10 - 9 + 0 = -19$.

Svar: $-5x - 3y + z = -19$ eller $5x + 3y - z = 19$.

4. $g(x, y, z) = \ln \sqrt{x + 2y - 3z} = \frac{1}{2} \ln (x + 2y - 3z).$

Vi bildar först gradienten av $g : (g'_x, g'_y, g'_z) = \frac{1}{2} \frac{(1, 2, -3)}{x + 2y - 3z}.$

$\text{grad} g(2, 1, 1) = \frac{1}{2}(1, 2, -3).$

Riktningsderivatan för g i $(2, 1, 1)$ i riktningen $\bar{u}$ ges av $g'_u = \frac{1}{2}(1, 2, -3) \cdot \bar{u}$ om $\bar{u}$ är normerad.

Här är den givna riktningen $-(2, 1, 1)$ som normerad blir $(-2, -1, -1)/\sqrt{6}.$

Man får alltså den sökta riktningsderivatan $g'_u(2, 1, 1) = \frac{1}{2}(1, 2, -3) \cdot (-2, -1, -1)/\sqrt{6} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(-2 - 2 + 3) = \underline{-\sqrt{6}/12}.$

5. Normalekvationerna svarande mot det överbestämda systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{är :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{dvs :}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cramers regel ger

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{83}{50} \quad \text{och} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{71}{50}$$

6. $u''_{xx} - u''_{yy}$ skall bestämmas då $u(x, y) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Vi använder att $r'_x = x/r$ och $r'_y = y/r$:

$$u'_x = f'(r)r'_x = f'(r)\frac{x}{r}$$

$$u''_{xx} = f''(r)(x/r)\frac{x}{r} + f'(r)\left(\frac{1 \cdot r - x \cdot (x/r)}{r^2}\right) = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - x^2}{r^3} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{y^2}{r^3}.$$

På samma sätt (x och y byter plats, r oförändrad) :

$$u'_y = f'(r)r'_y = f'(r)\frac{y}{r}$$

$$u''_{yy} = f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2}{r^3}.$$

Slutligen:

$$\begin{aligned} u''_{xx} - u''_{yy} &= f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{y^2}{r^3} - f''(r)\frac{y^2}{r^2} - f'(r)\frac{x^2}{r^3} = \\ &= f''(r)\frac{x^2 - y^2}{r^2} + f'(r)\frac{y^2 - x^2}{r^3} = \underline{(x^2 - y^2)\left(\frac{f''(r)}{r^2} - \frac{f'(r)}{r^3}\right)}. \end{aligned}$$

7. Vi skall visa att ekvationen $G(x, y, z) = x^5 + y^3 + z^4 - (x^2 + y^2)z - 1 = 0$ definierar en (differentierbar) funktion $z = h(x, y)$ lokalt i en omgivning av $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Enligt implicita funktionssatsen gäller detta om $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ i $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Här får vi

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 4z^3 - (x^2 + y^2) \quad \text{och} \quad \frac{\partial G}{\partial z}(1, 1, 1) = 2 \neq 0.$$

Påståendet är alltså visat.

Bestämning av $h'_x(1, 1)$ och $h'_y(1, 1)$:

Derivering av G med avseende på x och y ger (sätt $\frac{\partial z}{\partial x} = h'_x$ osv.):

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 5x^4 + 4z^3h'_x - 2xz - (x^2 + y^2)h'_x = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 3y^2 + 4z^3h'_y - 2yz - (x^2 + y^2)h'_y = 0.$$

Insättning av $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ger de sökta h -derivatorna :

$$5 + 4h'_x - 2 - 2h'_x = 0, \quad 2h'_x = -3, \quad h'_x(1, 1) = -3/2.$$

$$3 + 4h'_y - 2 - 2h'_y = 0, \quad 2h'_y = -1, \quad \underline{h'_y(1, 1) = -1/2}.$$

8. Vi visar att vektorerna $\bar{a}, \bar{b}$ och $\bar{c}$ är linjärt beroende genom att visa att det finns oändligt många linjärkombinationer $x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$ som är lika med 0-vektorn. Därigenom kan vi samtidigt lösa problemet att skriva en av vektorerna som en linjärkombination av de andra. Vi löser alltså följande linjära ekvationssystem (de givna vektorerna sätts in som kolumner):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

0-raden indikerar att det finns oändligt många lösningar.

2:a ekvationen ger $y - 3z = 0$, $y = 3z$.

1:a ekvationen ger $x + 3y - 4z = 0$, $x = -9z + 4z = -5z$

Ekvationen $x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} = \bar{0}$ har alltså oändligt många lösningar, bl.a den för $z = 1$, $y = 3$ och $x = -5$. Detta ger linjärkombinationen $\bar{c} = 5\bar{a} - 3\bar{b}$.

Svar: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Anm: Flera möjliga svar finns.

9. Vi löser uppgiften som ett extremvärdesproblem med bivillkor. Eftersom den givna funktionen $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 8y$ är deriverbar överallt och bivillkorskurvan (cirkeln) $H(x, y) = x^2 + y^2 - 6y = 0$ är sluten, begränsad och saknar singulära punkter, återfinns totala max- och minpunkterna bland de lösningar som erhålls från Lagranges metod.

Bestäm alltså lösningarna till systemet $\text{grad } F = \lambda \text{grad } H, \quad H = 0$:

$$(1) \quad 2x = \lambda 2x$$

$$(2) \quad 4y - 8 = \lambda(2y - 6)$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 6y = 0.$$

Antag först att $x \neq 0$:

$$(1) \text{ ger } \lambda = 1 \quad (2) \text{ ger } 4y - 8 = 2y - 6, \quad 2y = 2, \quad y = 1$$

$$(3) \text{ ger } x^2 = 6 - 1 = 5, \quad x = \pm\sqrt{5}. \quad \text{Man får alltså de två punkterna } (\pm\sqrt{5}, 1).$$

Antag sedan att $x = 0$:

$$(3) \text{ ger } y^2 - 6y = 0, \quad y(y - 6) = 0, \text{ dvs } y = 0 \text{ eller } y = 6. \quad \text{Man ser att både (1)}$$

och (2) satisfieras av $(x, y) = (0, 0)$ och $(0, 6)$ (för lämpligt värde på λ).

Jämförelse mellan funktionsvärdena i de fyra stationära punkterna:

$$F(\pm\sqrt{5}, 1) = -1, \quad F(0, 0) = 0, \quad F(0, 6) = 24$$

Alltså, $F_{\max} = 24$, $F_{\min} = -1$. Eftersom F är kontinuerlig på bivillkorskurvan antas alla värden mellan -1 och 24.

Svar: Vardemängden är det slutna intervallet $[-1, 24]$.

10a. Eigenvärden och egenvektorer skall bestämmas till $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = P^{-1}AP$ där $P =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ och alltså } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Man får:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

A:s eigenvärden:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \text{ ger } \lambda = 1 \pm \sqrt{3}$$

A:s egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}} \text{ ger relationen } -(1 + \sqrt{3})x + 2y = 0, \text{ som ger egenvektorn } \bar{v}_1 = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}} \text{ ger relationen } -(1 - \sqrt{3})x + 2y = 0, \text{ som ger egenvektorn } \bar{v}_2 = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

B:s eigenvärden:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 4\lambda - 8 + 6 = \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \text{ ger } \lambda = 1 \pm \sqrt{3}$$

B:s egenvektorer:

$$\underline{\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}} \text{ ger relationen } (3 - \sqrt{3})x + 3y = 0, \text{ som ger egenvektorn } \bar{w}_1 = t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}} \text{ ger relationen } (3 + \sqrt{3})x + 3y = 0, \text{ som ger egenvektorn } \bar{w}_2 = t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

10b. Påståendet följer av att matriserna A och B har samma karakteristiska polynom:

(Låt I nedan vara enhetsmatrisen med samma dimensioner som A och B)

$$\begin{aligned} B\text{:s karakteristiska polynom} &= \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(P) = \end{aligned}$$

$\det(A - \lambda I)$ = A :s karakteristiska polynom. VSV.

Lägg märke till att A och B i 10a. har samma karakteristiska polynom.

Alternativt bevis: Antag att λ är ett egenvärde till B : $B\bar{v} = \lambda\bar{v}$. för någon vektor $\bar{v}$.

Det innebär att

$$\begin{aligned} P^{-1}AP\bar{v} &= \lambda\bar{v} \\ AP\bar{v} &= \lambda P\bar{v} \end{aligned}$$

vilket betyder att λ är ett egenvärde också till A (med egenvektorn $P\bar{v}$).

På samma sätt visas att om λ är ett egenvärde till A så är λ ett egenvärde till B (använd att $A = PBP^{-1}$).