KTH Matematik

Tentamen i Matematik II, 5B1116, för Bio. E, K, ME och Media samt 5B1136 för I, torsdagen den 8/6 2006.

Inga hjälpmedel tillåtna.
För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Om 15p uppnås finns möjlighet ett komplettera inom tre veckor. Kontakta i så fall kursledare. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga motiveringar.

1. Lös ut matrisen X ur matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3p)

2. Bestäm de lokala extrempunkterna till funktionen $f(x) = x^4 - 2xy + y^2$ samt ange deras karaktär. (3p)

3. Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot planet $2x-3y+z = 0$ och som innehåller linjen $(x, y, z) = (2 + t, 3 - t, 2t)$. (3p)

4. Bestäm riktningsderivatan för funktionen $g(x, y, z) = \ln \sqrt{x + 2y - 3z}$ i punkten $(2, 1, 1)$ i riktning mot origo. (3p)

5. Lös i minstakvadsratmetodens mening det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3p)

V.g. vänd!

6. Antag $u(x,y) = f(r)$ där $r = \sqrt{x^2+y^2}$ och f en två gånger deriverbar funktion. Bestäm $u''_{xx} - u''_{yy}$ i termer av derivator av f.

(4p)

7. Visa att sambandet $x^5 + y^3 + z^4 - (x^2+y^2)z - 1 = 0$ definierar en differentierbar funktion $z = h(x,y)$ lokalt omkring punkten $(1,1,1)$ samt ange h'_x och h'_y i punkten $(x,y) = (1,1)$.

(4p)

8. Visa att vektorerna $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\-4\\8\end{pmatrix}$ är linjärt beroende samt skriv en av dem som en linjärkombination av de övriga. (4p)

9. Bestäm värdemängden av funktionen $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - 8y$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 6y$. (4p)

10 a. Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer.till matrisen $A = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ och till matrisen $B = P^{-1}AP$, där $P = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$. (2p)

10 b. Visa allmänt att om två kvadratiska matriser S och T uppfyller $S = P^{-1}TP$, för någon inverterbar matris P, så har de samma egenvärden.
(2p)