Lösning till tenta 2006-12-20 matematik 2 för media (5B1116)

1.1 (a) F om $n = 3$, meningslös annars. Kryssprodukten är endast definierad i $\mathbb{R}^3$, så egentligen är utsagan meningslös för $n \neq 3$ (inte falsk). I $\mathbb{R}^3$ är kryssprodukten noll precis då vektorerna är parallella. (b) K. (c) F. (d) K.

1.2 Det följer från ekvation 1och 3 att $0 = 2(x+2y+z)-(2x+4y+2z) = 2a-6$, så systemet saknar lösningar om $a \neq 3$. För $a = 3$ ger Gausselimination lösningsmängden $\{(3-4t, t, 2t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Låt $AB = B - A = (1, -1, -1)$, $AC = C - A = (2, 0, -2)$, $BC = C - B = (1, 1, -1)$.

(a) Omkretesen är $|AB| + |BC| + |AC| = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

(b) $\cos(\alpha) = \frac{AB \cdot AC}{|AB||AC|} = 2/\sqrt{6}$

(c) $\sin(\beta) = \frac{|AB \times BC|}{|AB||BC|} = 2\sqrt{2}/3$

2.1 (a) K. (b) K. (c) F. (d) K.

2.2 (a) Låt A representera F i standardbasen.

$$A = (F(1,0,0)\ F(0,1,0)\ F(0,0,1)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Låt

$$B = (F(1,0,1)\ F(0,1,1)\ F(1,1,0)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\mathrm{Det}(B) = 14 \neq 0$, har vi att kolonnerna är linjärt oberoende, och således utgör de en bas.

2.3 Radutveckling ger determinanten $3a^2 - a - 2$, så denna är noll precis då $a = 1$ eller $a = -2/3$. Matrisen har alltså invers precis då $a \neq 1$ och $a \neq -2/3$. Sats 6.8 i [Petermann] ger inversen

$$\frac{1}{3a^2 - a - 2} \begin{pmatrix} 1-a & a^2+a-2 & 1-a \\ -4 & 4-2a & 3a-2 \\ 3a+1 & -2a & -1 \end{pmatrix}$$

3.1 (a) K. (b) F. Motexempel: $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $f(0, 0) = 0$. (c) K. (d) F. v måste vara normerad.

3.2 Om $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}(4xy+5z)$ så har vi att $\text{Grad}(f)(0,0,1) = (0,0,5)$. Vi får följande ekvation för tangentplanet $0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-0) + 5(z-1) = 0$, som är ekvivalent med $z = 1$.

3.3 Observera att $f'_x = (y/x)/y = 1/x$, $f'_y = (y/x)(-x/y^2) = -1/y$, $x'_u = y'_u = y'_v = 1$ och $x'_v = -1$. Kedjeregeln ger

$$f'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u = f'_x + f'_y = 1/x - 1/y$$

$$f'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v = -f'_x + f'_y = -1/x - 1/y$$

Tillämpar vi kedjeregeln igen får vi $f''_{uu} = -1/x^2 + 1/y^2$ och $f''_{vv} = -1/x^2 + 1/y^2$, så $f''_{uu} = f''_{vv}$, vilket skulle visas.

4.1 (a) F. Motexempel: Identitetsmatrisen är diagonaliserbar (den är diagonal) men den har endast ett egenvärde, nämligen 1. (b) K. (c) K. (d) F. Det gäller att determinanten för en ortogonal matris är 1 eller -1. Exemplvis

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

är ortogonal, med determinant -1.

4.2 Frågan lyder: Är A diagonaliserbar? Svar: Ja, ty A är symmetrisk.

4.3 $x^2+2xy+y^2-z^2+2x+2y+2z = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2-z^2+2(x+y)+2z = 0$. I koordinaterna $x' = x+y$, $y' = y$, $z' = z$ blir ekvationen $x'^2-z'^2+2x'+2z' = 0$, vilket är ekvivalent med $(x'+1)^2-(z'-1)^2 = 0$. I koordinaterna $x'' = x'+1$, $y'' = y'$, $z'' = z'-1$ får vi alltså ekvationen $x''^2 - z''^2 = 0$ (huvudaxelform). Detta är uppfyllt precis då $x'' = \pm z''$ (y'' godtyckligt), så geometriskt sett har vi två plan som skär varandra i en linje.

5.1 (a) F. Avbildningen $Y(s,t) = (0,0,0)$ är linjär men bilden är en punkt (origo). (b) K. (c) F. (d) F enligt [Persson, Böiers], K enligt [de flesta andra]. Antar att man får rätt hur man än svarat, och även om man mot förmodan inte svarat. Oenigheten gäller definitionen av semidefinit.

5.2 (a) K är en fylld triangel med hörn i $(0,0)$, $(0,4)$ och $(4,0)$, där randtriangeln ingår i K.

(b) K är sluten (randen ingår) och begränsad ($x \in K \Rightarrow |x| \leq 4$) så K är kompakt.

(c) För $(x,y) \in K$ har vi $0 \leq f(x,y)$ och $f(0,0) = 0$, så f:s minsta värde i K är 0. I det inre av K har vi att f är strikt större än 0 och att $\text{Grad}(f) = 0$ precis då $\text{Grad}(\ln \circ f) = 0$. Vi har att $\text{Grad}(\ln \circ f) = \text{Grad}(2\ln(x) + \ln(y) - (x+y)) = (2/x - 1, 1/y - 1)$, vilket är noll precis då $(x,y) = (2,1)$. En kandidat till största värde: $f(2,1) = 4/e^3$. Var det gäller K:s rand har vi att om $x = 0$ eller $y = 0$ så $f(x,y) = 0$, varför vi enbart behöver undersöka f:s värden på $x + y = 4$, $0 \leq x$, $0 \leq y$. Vi har $f(x, 4-x) = x^2(4-x)e^{-4}$. Derivation med avssende på x ger största värdet $f(8/3, 4/3) = 2^8/(3^3e^4)$. Observera att $\frac{2^8}{3^3e^4} = \frac{4}{e^3}\frac{2^6}{3^3e}$ och $2^6/3^3 = 64/27 = 2+10/27 < 5/2 < e$. Alltså $\frac{2^6}{3^3e} < 1$ och $2^8/(3^3e^4) < 4/e^3$. Största värdet i K är således $f(2,1) = 4/e^3$.

5.3 Låt $F(x,y,z) = x^2 - y + 3z$ och $G(x,y,z) = xy + y^2 - z^2$. Vi har att

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}\right|_{(x,y,z)=(-1,1,0)} = \left.\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ y & x+2y \end{vmatrix}\right|_{(x,y,z)=(-1,1,0)} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

och enligt en variant av implicita funktionssatsen (sida 153 i [Persson, Böiers]) finns det i lösningsmängden en omgivning till $(-1,1,0)$ som vi kan parametrisera med z som prameter.