KTH Matematik

Lösningar till tentamen i Matematik II, 5B1116, 5B1136 , tisdagen den 13 mars 2007.

1. Planet Π är parallellt med vektorerna $\bar{a} = (1-1, 2-1, 4-1) = (0,1,3)$ och $\bar{a} = (2-1, 3-1, 5-1) = (1,2,4)$, vars vektorprodukt är Π:s normalvektor $(-2,3,-1)$. Linjen $(2-2t, 2+3t, 3-t)$ går genom punkten $P = (2,2,3)$ och är vinkelrät mot Π, och den skär Π då $t = \frac{1}{14}$. Därmed blir kortaste avstånd vektorn mellan $(2,2,3)$ och $(2-\frac{2}{14}, 2+\frac{3}{14}, 3-\frac{1}{14})$, som är $\frac{1}{14}\sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

2. Paraboloiden definieras av ekvationen $f(x,y,z) = 0$, där $f(x,y,z) = z - 3x^2 + y^2$.
Tangentplanet till ytan i en punkt P har normalvektorer som är parallella med grad$f(P)$.
Vi söker en punkt P på paraboloiden vars tangentplan är parallellt med planet $3x + 2y + x = 0$, vilket betyder att P skall uppfylla grad$f(P) = k(3,2,1),\ k \neq 0$.
Alltså, grad$f(x,y,z) = (-6x, 2y, 1) = k(3,2,1)$
dvs. $k = 1, \quad 2y = 2, \quad -6x = 3$.
Detta ger $x = -1/2, \quad y = 1$.
För att punkten (x,y,z) skall ligga på paraboloiden måste z uppfylla:
$z = 3(-1/2)^2 - 1^2 = -1/4$.
Svar : Den sökta punkten på paraboloiden är $(-1/2,\ 1\ , -1/4)$.

3. Vi söker matrisen X så att $AX = BA$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
Man får $X = A^{-1}AX = A^{-1}BA$.
Eftersom, allmänt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ där $D = ad - bc$, får man

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dessutom:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

V.g. vänd!

och alltså:

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -3 & -19 \end{pmatrix}}$$

4. Man har $f_u^{'} = az_x^{'} + z_y^{'}$ och vidare $(f_u^{'})_u^{'} = a(az_{xx}^{''} + z_{xy}^{''}) + (az_{yx}^{''} + z_{yy}^{''}) = a^2 z_{xx}^{''} + 2az_{xy}^{''} + z_{yy}^{''}$, då $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$ enligt förutsättningen, samt $(f_u^{'})_v^{'} = a(bz_{xx}^{''} + z_{xy}^{''}) + bz_{yx}^{''} + z_{yy}^{''} = abz_{xx}^{''} + (a+b)z_{xy}^{''} + z_{yy}^{''}$. Då blir $f_{uu}^{''} - f_{uv}^{''} = a(a-b)z_{xx}^{''} + (a-b)z_{xy}^{''}$. Enda valet är $a = 0 \neq b$ för att första termen skall vara noll, men den andra nollskild, och vi får även $c = -b$.

5. Det karakteristiska polynomet $|A - \lambda I| = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 20 + 20) = \lambda(\lambda - 1)^2$ ger enkla egenvärdet 0 med tillhörande egenvektor exempelvis $\bar{v}_1 = (5, 2, 0)$ samt dubbla egenvärdet 1 med egenvektorer som fås ur ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{rrr} -5 & 10 & 0|0 \\ -2 & 4 & 0|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 0|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \end{array}\right)$$

som ger två egenvektorer, exempelvis $\bar{v}_2 = (2, 1, 0)$ och $\bar{v}_3 = (0, 0, 1)$. Den diagonaliserade matrisen är således

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i basen $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Den diagonaliserade matrisen beskriver just en projektionsavbildning på ett plan genererat av $\bar{v}_2, \bar{v}_3$.

6. Alternativ 1. $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2} = x - y$ som går mot noll då $(x, y) \to (0, 0)$.

Alternativ 2. Polära koordinater: $f(x, y) = g(r, \theta) = \frac{r^3(cos^3(\theta) - sin^3(\theta))}{r^2(cos^2(\theta) + cos(\theta)sin(\theta) + sin^2(\theta))} = r\frac{cos^3(\theta) - sin^3(\theta)}{1 + sin(2\theta)/2}$; då täljaren är begränsad och nämnaren är alltid skild från noll, får man att $g(r, \theta) \to 0$ då $r \to 0$. Genom att tilldela funktionsvärdet $f(0, 0) = 0$ blir f kontinuerlig i hela xy-planet.

7a. Ekvationssystemet på matrisform:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{Gausseliminera:} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right]$$

De två sista ekvationerna är identiska.
De två första ger : $\underline{y = -1, \quad x = 0.}$

7b.

Systemet $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ skall lösas i minstakvadrat-metodens mening.

Normalekvationssystemet blir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{vilket ger:}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Systemdeterminanten, $\quad D = 6 \cdot 14 - (-3 \cdot (-3) = 75.$

Cramers regel ger :

$$x = \frac{1}{75} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -11 & 14 \end{vmatrix} = \frac{-5}{75} = -\frac{1}{15}.$$

$$y = \frac{1}{75} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} = \frac{-60}{75} = -\frac{4}{5}.$$

Svar: $\underline{\quad x = -\frac{1}{15}, \quad y = -\frac{4}{5}.}$

8. Största och minsta värdet av funktionen $F(x,y) = xy$ på området $2x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} \le 6$ skall bestämmas.

Inre stationära punkter:
$F'_x = y = 0, \quad F'_y = x = 0$ ger den stationära punkten $(x,y) = (0,0)$.

Stationära randpunkter kan bestämmas med hjälp av Lagranges metod.
Vi undersöker stationära punkter för $F(x,y) = xy$ under bivillkoret $G(x,y) = 2x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} - 6$, där alltså ekvationen $G(x,y) = 0$ representerar områdets rand. Notera att denna kurva, som kan skrivas $2(x+y/4)^2 + 3y^2/8 = 6$, är begränsad (ellips, eftersom ekvationen är av 2:a graden) och sluten. Därför finns ett största och ett minsta värde för den kontinuerliga funktionen $F(x,y)$ på randen.
$\mathrm{grad}F = \lambda \mathrm{grad}G$ ger $(y,x) = \lambda(4x+y, x+y)$ eller:
(1) $y = \lambda(4x+y)$
(2) $x = \lambda(x+y)$. Bivillkoret ger
(3) $2x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} = 6.$
$\lambda = 0$ i (1) och (2) ger $x = y = 0$, som inte uppfyller (3).
Antag nu att $\lambda \neq 0$.
(1) ger $\dfrac{xy}{\lambda} = 4x^2 + xy.$
(2) ger $\dfrac{xy}{\lambda} = xy + y^2$
Man får alltså
$4x^2 + xy = xy + y^2$, dvs $y^2 = 4x^2$, vilket ger
(A) $y = 2x$ eller (B) $y = -2x$.
Fall (A) i (3):
$2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 6, \quad 6x^2 = 6, \quad x = \pm 1$, vilket ger de stationära punkterna $(1,2)$ och $(-1,-2)$
Fall (B) i (3) ger:
$2x^2 - 2x^2 + 2x^2 = 6, \quad 2x^2 = 6, \quad x = \pm\sqrt{3}$, vilket ger de stationära punkterna $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ och $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$.
Jämförelse av funktionsvärdena i de erhållna stationära punkterna ger :
$F(0,0) = 0,$
$F(1,2) = F(2,1) = 2,$
$F(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = -6.$
Svar:
Max: $F(1,2) = F(2,1) = 2$. Min: $F(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}) = F(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = -6.$

9. Vi har $\bar{u}\cdot\bar{u}+2(\bar{u}\cdot\bar{v})+\bar{v}\cdot\bar{v}$ = [enligt räknelagar för skalärprodukt] = $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v})$ = [förutsättningar] = $9+\sqrt{8}$ och $\bar{u}\cdot\bar{u}-2(\bar{u}\cdot\bar{v})+\bar{v}\cdot\bar{v}$ = [enligt räknelagar för skalärprodukt] = $(\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})$ = [förutsättningar] = $9-\sqrt{8}$. Efter subtraktion och addition av de båda likheterna får vi $4(\bar{u}\cdot\bar{v}) = 2\sqrt{8} \Leftrightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{\sqrt{8}}{2}$ respektive $2(\bar{u}\cdot\bar{u}) + 2(\bar{v}\cdot\bar{v}) = 18 \Leftrightarrow \bar{u}\cdot\bar{u}+\bar{v}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2 = 9$. Ur den senare likheten får vi även ut $|u| = \sqrt{8}$, eftersom $|v| = 1$. Slutligen, $cos(\phi) = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|u||v|} = \frac{(\sqrt{8})/2}{(\sqrt{8})\cdot 1} = \frac{1}{2}$, och vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är $\phi = arccos(\frac{1}{2}) = \pi/3$ radianer.

10. Sambanden kan beskrivas på matrisform:

$$\bar{v}_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \bar{v}_f \quad \text{och} \quad \bar{v}_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \bar{v}_g$$

där $\bar{v}_e, \bar{v}_f, \bar{v}_g$ är koordinaterna för en vektor $\bar{v}$ i baserna e, f respektive g. Detta ger nedanstående samband mellan f och g:

$$\bar{v}_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \bar{v}_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \bar{v}_f =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \bar{v}_f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \bar{v}_f$$

Då får vi även att om $\bar{v}_f = (3, 10)_f$, så blir

$$\bar{v}_g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} -30 \\ 43/2 \end{pmatrix}_g$$

Ur det andra sambandet eliminerar vi $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ i taget och får $\bar{e}_1 = \frac{1}{2}(-4\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2)$ respektive $\bar{e}_2 = \frac{1}{2}(2\bar{g}_1 - \bar{g}_2)$. Detta ger vidare

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 = \frac{1}{2}(-4\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2) + (2\bar{g}_1 - \bar{g}_2) = \frac{1}{2}\bar{g}_2 \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 = \frac{1}{2}(-4\bar{g}_1 + 3\bar{g}_2) - \frac{1}{2}(2\bar{g}_1 - \bar{g}_2) = -3\bar{g}_1 + 2\bar{g}_2 \end{cases}$$

vilket ger ett svar på den andra frågan, men även implicit på den första frågan: $(3, 10)_f = 3\bar{f}_1 + 10\bar{f}_2 = 3(\frac{1}{2}\bar{g}_2) + 10(-3\bar{g}_1 + 2\bar{g}_2) = -30\bar{g}_1 + \frac{43}{2}\bar{g}_2 = (-30, 43/2)_g$.