

Tentamen i Matematik 2, 5B1116, för Bio och K
samt 5B1136 för I,
tisdagen den 13/3 2007, kl. 14.00 - 19.00.

Inga hjälpmedel tillåtna.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Om 14p uppnås finns möjlighet att komplettera inom tre veckor. Kontakta i så fall kursledare. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga motiveringar.

1. Skriv ned ekvationen för det plan Π som går genom punkterna $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 4)$ och $(2, 3, 5)$. Räkna ut kortaste avståndet från punkten $(2, 2, 3)$ till planet Π . (3p)

2. Bestäm den punkt på paraboloiden $z = 3x^2 - y^2$ där tangentplanet är parallellt med planet $3x + 2y + z = 0$. (3p)

3. Lös matrisekvationen $AX = BA$, där
 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (3p)

4. Låt $z = z(x, y)$ vara en funktion vars alla partiella derivator av andra ordningen är kontinuerliga. Låt vidare $x = au + bv$, $y = u + v$ för reella tal a , b så att $z(x, y) = f(u, v)$. Räkna ut differentialuttrycket $f''_{uu} - f''_{uv}$ och visa sedan att det endast finns *ett* val av a så att differentialuttrycket övergår till cz''_{xy} för någon konstant $c \neq 0$. (3p)

5. Nedanstående matris är diagonaliserbar.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm den diagonala matrisen D till A . Visa sedan genom att studera D att A beskriver en projektion på ett plan. (3p)

V.g. vänd!

6. Går det att tilldela funktionen $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$ ett värde i origo så att f blir kontinuerlig för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? (4p)

7a. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y &= -2 \\x - 3y &= 3 \\2x - y &= 1.\end{aligned}\tag{1p}$$

7b. Lös i minstakvadratmetodens mening ekvationssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y &= -2 \\x - 3y &= 2 \\2x - y &= 1.\end{aligned}\tag{3p}$$

8. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $F(x, y) = xy$ på det slutna, begränsade område som definieras av olikheten

$$2x^2 + xy + \frac{y^2}{2} \leq 6.\tag{4p}$$

9. Låt vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ vara sådana att $|\bar{u} + \bar{v}| = \sqrt{9 + \sqrt{8}}$ och $|\bar{u} - \bar{v}| = \sqrt{9 - \sqrt{8}}$. Vidare är $|\bar{v}| = 1$. Räkna ut vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

Ledning. Räkna ut $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v})$ samt $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})$ och utnyttja de samband du får för att räkna ut $\bar{u} \cdot \bar{v}$ samt $|\bar{u}|$. (4p)

10. Låt $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$. Vidare är $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ och $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$ med

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \\ \bar{f}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} \bar{g}_1 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 \\ \bar{g}_2 = 2\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 \end{cases} \tag{1}$$

två andra baser för $\mathbb{R}^2$. Låt $\bar{u}$ vara en vektor med följande koordinater i f -basen: $\bar{u} = 3\bar{f}_1 + 10\bar{f}_2 = (3, 10)_f$. Vad blir $\bar{u}$:s koordinater i g -basen? Ange även ett samband mellan $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ och $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$, på matrisform eller formen som i (1). (4p)

LYCKA TILL!