

Lösningsförslag till tentamen i Matematik II, 5B1116, för Bio och K samt 5B1136 för I, torsdagen den 7/6 2007, kl. 8 - 13

1. Visa att $(1, 2, -1)$ är skärningspunkten till linjerna $\bar{r} = (1, 2, -1) + t(1, 1, 0)$ och $\bar{r} = (-1, 2, 3) + t(-1, 0, 2)$. Bestäm ekvationen för planet som linjerna ligger i.

Punkten $(1, 2, -1)$ är skärningspunkten då den tillhör första linjen då $t = 0$ och den andra då $t = -2$. Vidare, planets normal $\bar{n}$ är vinkelrät mot de båda linjernas riktningsvektorer, dvs $\bar{n} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, 2) = (2, -2, 1)$. Alltså är att planets ekvation $2x - 2y + z + D = 0$. Genom att sätta in koordinaterna för en godtycklig punkt i planet, exempelvis $(1, 2, -1)$, får man $D : 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + D = -3 + D = 0$. Svar: $2x - 2y + z + 3 = 0$. Alternativt. Genom att sätta upp sambandet $\bar{r} = (1 + t, 2 + t, -1) = (-1 - s, 2, 3 + 2s)$ får man ett ekvationssystem med 3 ekvationer och två obekanta och vars lösning är $t = 0, s = -2$. Som svar på andra frågan kan man ange en godtycklig punkt i planet tillsammans med två vektorer som planet är parallellt med, till exempel: $(1, 2, -1) + t(1, 1, 0) + s(-1, 0, 2)$.

2. Bestäm riktningsderivatan för funktionen $u(x, y, z) = \ln(2x^2 + 3y^2 + z)$ i punkten $(2, -2, 1)$ i riktning mot origo.

Vi har $f'_{\bar{v}}(a) = \text{grad}f(a) \cdot \bar{v}$ där $|\bar{v}| = 1$. Riktningen är $\bar{0} - (2, -2, 1) = (-2, 2, -1)$ och den normerade riktningen blir $\bar{v} = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$. Sedan är $\text{grad}f(a) = (\frac{4x}{2x^2+3y^2+z}, \frac{6y}{2x^2+3y^2+z}, \frac{1}{2x^2+3y^2+z})_{(2,-2,1)} = (\frac{8}{21}, \frac{-12}{21}, \frac{1}{21})$ och svaret blir $(\frac{8}{21}, \frac{-12}{21}, \frac{1}{21}) \cdot \frac{1}{3}(-2, 2, -1) = (-\frac{41}{63})$.

3. Visa att $v(x, y) = f(y - x^2)$ uppfyller partiella differentialekvationen $v''_{xx} = 4x^2v''_{yy} - 2v'_y$.

Låt $u = y - x^2$. Då är

$$v'_y = f'_u \cdot u'_y = f'_u (*) \text{ och } v'_x = f'_u \cdot u'_x = f'_u \cdot (-2x).$$

Vidare är $v''_{yy} = (f'_u)'_y = f''_{uu} \cdot u'_y = f''_{uu} (**)$ och

$$v''_{xx} = (f'_u \cdot (-2x))'_x = (f'_u)'_x \cdot (-2x) + f'_u \cdot (-2x)'_x = f''_{uu}(-2x)(-2x) + f'_u(-2) = 4x^2f''_{uu} - 2f'_u.$$

$$\text{Dvs. } v''_{xx} = 4x^2f''_{uu} - 2f'_u \quad (1)$$

(*) och (**) insatta i (1) visar likheten.

V.g. vänd!

4. Visa att $(1, 1)$ är en stationär punkt för funktionen $F(x, y) = x^3 - 2y^3 + xy - 4x + 5y$ och bestäm dess karaktär.

Vi har $F'_x(1, 1) = 0 = F'_y(1, 1)$; alltså är $(1, 1)$ stationär per definition. För att bestämma karaktären beräknar vi för punkten $(1, 1)$ följande: $A = F''_{xx} = 6$, $B = F''_{xy} = 1$, $C = F''_{yy} = -12$. Den kvadratiske formen $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 6h^2 + 2hk - 12k^2 = [\text{kvadratkomplettering}] = 6(h + \frac{k}{6})^2 - \frac{k^2}{6} - 12k^2 = 6(h + \frac{k}{6})^2 - \frac{73k^2}{6}$ är en differens av två kvadrater och är indefinit. Alltså är punkten en sadelpunkt.

5.

$$\text{Bestäm } A^{-1} \text{ och lös } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ om } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Högra delen av sista matrisen är A^{-1} och lösningen till systemet är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

6. Låt de nya basvektorerna vara $\bar{f}_1 = \frac{1}{5}(4, 3)$ och $\bar{f}_2 = \frac{1}{5}(-3, 4)$. Bestäm ekvationen för den kurva som i gamla systemet har ekvationen $y = x^2$.

En punkt med koordinaterna (u, v) i $\bar{f}$ -basen får koordinaterna $\frac{1}{5}(4u - 3v, 3u + 4v) = (x, y)$ i gamla $\bar{e}$ -basen. Eftersom $y = x^2$ gäller för punkterna på kurvan, så gäller alltså $\frac{1}{5}(3u + 4v) = \left(\frac{1}{5}(4u - 3v)\right)^2 \Leftrightarrow 5(3u + 4v) = 16u^2 - 24uv + 9v^2 \Leftrightarrow 16u^2 - 24uv + 9v^2 - 15u - 20v = 0$.

7. Bestäm största och minsta avståndet från origo till kurvan $3x^4 + y^4 = 12$.

Det är frågan om optimering av avståndsfunktionen $\sqrt{x^2 + y^2}$ eller hellre $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $g(x, y) = 3x^4 + y^4 = 12$. I en punkt som löser problemet har vi $\nabla f = \lambda \nabla g$, dvs $(2x, 2y) = \lambda(12x^3, 4y^3)$. Två lösningar är $x = 0$ med respektive $y = \pm \sqrt[4]{12}$, som fås från $g(x, y) = 1$, och $y = 0$ med respektive $x = \pm \sqrt[4]{12}$. Om man antar att x, y är skilda från noll ger sambandet $\nabla f = \lambda \nabla g$ att $\frac{1}{\lambda} = 6x^2 = 2y^2$, vilket insatt i bivillkoret ger $3x^4 + y^4 = 3x^4 + (3x^2)^2 = 12x^4 = 12$. De fyra lösningarna blir $x = \pm 1$, $y = \pm \sqrt{3}$.

Vi har nu följande funktionsvärden att jämföra:

$$f(0, \pm \sqrt[4]{12}) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$f(\pm \sqrt{2}, 0) = 2 \text{ (minst)}$$

$$f(\pm 1, \pm \sqrt{3}) = 4 \text{ (störst)}$$

Således är minsta avståndet $d = \sqrt{2}$

och största är $d = \sqrt{4} = 2$.

8. Visa att $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 4$ och $x + 2y - 3z + u = 1$ definierar $z(x, y)$ och $u(x, y)$ i en omgivning av $(1, 1, 1, 1)$. Bestäm $z'_x(1, 1)$ och $u'_x(1, 1)$.

För det första uppfyller $(1, 1, 1, 1)$ båda ekvationerna. Vi vill lösa ut z och u som funktioner av x och y . För att visa att detta går låt $F(x, y, z, u) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 4$ och $G(x, y, z, u) = x + 2y - 3z + u = 1$. Determinanten

$$\frac{d(F, G)}{d(z, u)} = \begin{vmatrix} 2z & 2u \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2z + 6u \neq 0 \text{ för } (z, u) = (1, 1).$$

Det betyder att differentierbara $z(x, y)$ och $u(x, y)$ existerar kring punkten $(1, 1, 1, 1)$. Implicit derivering av F och G med avseende på x ger vidare

$$\begin{cases} 2x + 2zz'_x + 2uu'_x = 0 \\ 1 - 3z'_x + u'_x = 0 \end{cases} \text{ som i } (1, 1, 1, 1) \text{ blir } \begin{cases} z'_x + u'_x = -1 \\ 3z'_x - u'_x = 1 \end{cases}$$

med lösningarna (och därmed svaret) $z'_x = 0$ och $u'_x = -1$.

9. Avgör typen av yta som definieras av $U(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4xz + 2x - z = 1$.

Vi studerar först diagonaliseringen av den kvadratiske delen $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 = (x, y, z)Q(x, y, z)^T$ där

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi behöver Q :s egenvärden och egenvektorer.

Egenvärden:

Karakteristiska ekvationen $|Q - \lambda E| = 0$ ger

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

som kan faktoriseras till :

$$\lambda(2 - \lambda)(\lambda - 5) = 0$$

Man får egenvärdena $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ och den kvadratiske delen $Q(x, y, z)$ transformeras alltså till:

$$2v^2 + 5w^2$$

(vi använder de nya variablerna u, v, w som relateras till egenvärdena λ_1, λ_2 resp. λ_3 .)

Egenvektorer (som behövs för att transformera 1:egradstermerna):

$\lambda_1 = 0$ ger $x + 2z = 0, 2y = 0$ och $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1)^T$ (normerad egenvektor)

$\lambda_2 = 2$ ger $-x + 2z = 0, 2x + 2z = 0$ och $\bar{v}_2 = (0, 1, 0)^T$

$\lambda_3 = 5$ ger $-4x + 2z = 0, -3y = 0$ och $\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)^T$

Man får alltså den diagonaliserande ortonormala transformationen:

$$(x, y, z)^T = C(u, v, w)^T \text{ där } C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Detta ger :

$$x = -\frac{2u}{\sqrt{5}} + \frac{w}{\sqrt{5}}, \quad z = \frac{u}{\sqrt{5}} + \frac{2w}{\sqrt{5}} \text{ och}$$

$$2x - z = -\frac{5u}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}u$$

vilket ger:

$$2v^2 + 5w^2 - \sqrt{5}u = 1.$$

Slutligen får man ren huvudaxelform genom translationen:

$$u' = u + 1/\sqrt{5}, \quad v' = v, \quad w' = w. \quad \text{som ger}$$

$\sqrt{5u'} = 2v'^2 + 5w'^2$ vilket visar att den definierade ytan är en elliptisk paraboloid (en skålformad yta vars snitt med plan vinkelräta mot u' -axeln för $u' > 0$ utgörs av ellipser).

10.

a. Visa att om matrisen A är symmetrisk, så är A^2 symmetrisk.

Vi har $(A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T = (A^T)^2 \stackrel{(A \text{ symmetrisk})}{=} A^2$. VSV.

b. Visa att om matrisen A har egenvärdet λ så har A^2 egenvärdet λ^2 .

Antag att A har egenvärdet λ . Då finns en vektor $\bar{v} \neq \bar{0}$ så att $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$.
Man får därför:

$$A^2\bar{v} = A(A\bar{v}) = A(\lambda\bar{v}) = \lambda(A\bar{v}) = \lambda(\lambda\bar{v}) = \lambda^2\bar{v}.$$

Därför har matrisen A^2 egenvärdet λ^2 . VSV.