Lösningar till tentamen den 17/12 2007

Matematik II, SF1609

1. Gradienten av $F(x,y,z) = x^2 - x - y^3 z$ är en normal till tangentplanet.

$\text{grad } F(x,y,z) = (2x-1, -3y^2 z, -y^3)$

$\text{grad } F(2,-1,-2) = (3, 6, 1)$. Tangentplanets ekvation är $3(x-2) + 6(y+1) + z + 2 = 0$ dvs $\underline{3x + 6y + z + 2 = 0}$.

2. Till ex. punkten $(1,2,-1)$ ligger i planet $5x - 2y + z = 0$. Eftersom planet går genom origo, så är vektorn $v = (1,2,-1)$ parallell med planet. $n = (5,-2,1)$ är en normal till planet. Vektorerna n, v och $n \times v$ är ortogonala och $n \times v$ är parallell med planet.

$$n \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6j + 12 = 6(0,1,2)$$

$\underline{\{(0,1,2), (1,2,-1), (5,-2,1)\}}$ är en ortogonal bas i rummet.

3. $\begin{cases} T(1,1) = T(1,0) + T(0,1) = (2,7) & (1) \\ T(-1,2) = -T(1,0) + 2T(0,1) = (7,-1) \end{cases}$

Genom att addera ekvationerna fås $3T(0,1) = (9,6)$

$\Rightarrow T(0,1) = (3,2)$. $(1) \Rightarrow T(1,0) = (2,7) - (3,2) = (-1,5)$

$\Rightarrow \underline{[T] = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}$

4. Linjerna skär varandra $\Leftrightarrow$ Ekvationssystemet

$\begin{cases} 2t = 1-s \\ 2-t = as \\ 3-3t = -s \end{cases}$ har en lösning (l. lösningar) (s,t).

$\Rightarrow \begin{cases} s + 2t = 1 \\ as + t = 2 \\ s - 3t = -3 \end{cases}$ $\quad (-a)\ (-1) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim$

4. (forts.)

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-2a & 2-a \\ 0 & -5 & -4 \end{array}\right)$ Om $1 - 2a = 0$ så är den andra ekv. $0 \cdot t = \frac{3}{2}$. Systemet har då ingen lösning.

Antag att $a \neq \frac{1}{2}$. Då är $t = \frac{2-a}{1-2a} = \frac{4}{5}$

$10 - 5a = 4 - 8a$, $3a = -6$ $\quad a = -2$

Den första ekvationen $s + 2t = 1$ ger då $s = 1 - 2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

Om $a = -2$ har ekv. lösningen $s = -\frac{3}{5}$, $t = \frac{4}{5}$.

Skärningspunkten är $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

5. 1) De kritiska punkterna för $f(x,y) = y(x-3) = xy - 3y$ fås ur ekvationerna $\begin{cases} y = 0 \\ x - 3 = 0. \end{cases}$ $(3,0)$ är en randpunkt.

2) Randen $x^2 + y^2 = 9$ kan parametriseras $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

$f(x,y) = 3\sin t(3\cos t - 3) = 9(\sin t \cos t - \sin t) = g(t)$

I ändpunkterna $g(0) = g(2\pi) = 0 \Rightarrow f(3,0) = 0$

$g'(t) = 9(\cos^2 t + \sin t(-\sin t) - \cos t)$ $\quad (\sin^2 t = 1 - \cos^2 t)$

$= 9(2\cos^2 t - \cos t - 1)$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2} = 0$ Låt $v = \cos t$

$v = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1 \pm 3}{4}$ $\quad \cos t = 1$, $\cos t = -\frac{1}{2}$.

Motsv. värden för $\sin t$ är $\sin t = 0$ resp. $\sin t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow (3,0)$ och $\left(-\frac{3}{2}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$f\left(-\frac{3}{2}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{9}{2}\right) = \pm \frac{27\sqrt{3}}{4}$

Största värdet är $\underline{\frac{27\sqrt{3}}{4}}$, minsta värdet $\underline{-\frac{27\sqrt{3}}{4}}$

6. Om $G(u,v) = \left(\frac{v}{u}, \frac{u-v}{v}\right)$, så är

$g(u,v) = f\left(\frac{v}{u}, \frac{u-v}{v}\right) = (f\circ G)(u,v)$ dvs $g = f\circ G$.

Enligt kedjeregeln $J_g(u,v) = J_f(G(u,v))\, J_G(u,v)$.

$$J_G = \begin{pmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix}, \quad (D_1 g \;\; D_2 g) = (D_1 f \;\; D_2 f)\, J_G.$$

Vi får $u D_1 g + v D_2 g = u\left(-\frac{v}{u^2} D_1 f + \frac{1}{v} D_2 f\right)$
$+ v\left(\frac{1}{u} D_1 f - \frac{u}{v^2} D_2 f\right) = 0$.

7. De partiella derivatorna av $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
är $D_1 f(x,y) = 4x^3 - 4y$, $D_2 f(x,y) = 4y^3 - 4x$.

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \Rightarrow (x^3)^3 = x \quad x^9 - x = 0$$

$x(x^8 - 1) = 0$ $\quad x = 0$ eller
$x^8 = 1 \Rightarrow x^4 = (\pm)1 \Rightarrow x^2 = (\pm)1 \quad x = \pm 1$

$y = x^3 \Rightarrow$ De kritiska punkterna är $(0,0)$ och $\pm(1,1)$.

I origo den kvadratiska formen $Q(x,y) = -4xy$ är indefinit.
Origo är en sadelpunkt.

Vi bestämmer de kvadr. formerna i punkterna $\pm(1,1)$.
$D_{11} f(x,y) = 12x^2$, $D_{12} f(x,y) = -4$, $D_{22} f(x,y) = 12y^2$

I båda punkterna
$Q(h,k) = 12h^2 - 8hk + 12k^2 = 12\left(h^2 - \frac{2}{3}hk + k^2\right)$
$= 12\left(\left(h - \frac{1}{3}k\right)^2 + \frac{8}{9}k^2\right)$ är positivt definit.

Punkterna $\pm(1,1)$ är lokala minimipunkter, $f(\pm(1,1)) = 0$.

8. a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 3 & 6 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 6-3a & b-6 \end{array}\right)$

(i) Om $a = 2$ och $b \neq 6$, har ekv. systemet ingen lösning.
Sista raden är $(0 \;\; 0 \mid \underbrace{b-6}_{\neq 0})$.

8(forts.) (ii) Om $a \neq 2$ har ekv. systemet entydig lösning. Sista raden är då $\left(0 \;\; 1 \mid \frac{b-6}{6-3a}\right)$.

(iii) Om $a = 2$ och $b = 6$, så finns oändl. många lösningar för att sista raden är en 0-rad.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & c & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & c+3 & -7 & -10 \end{array}\right)$

1) Om $c \neq -3$ kan man välja $z = t$ och lösa först y och sedan x.

2) Om $c = -3$ är $z = \frac{10}{7}$. I första ekv. väljes till ex. $y = t$.

Ekv. har oändligt många lösningar för alla värden av c.

9. För $t = -1$ är $r(-1) = (1, 3, -2)$.
$r'(t) = (4t^3, -3t^2, -6t)$ är en tangentvektor till kurvan.
$r'(-1) = (-4, -3, 6)$
Om $F(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 3z^2$, grad $F(x,y,z)$
$= (8x, 2y, 6z)$ är normal till ellipsoiden.
grad $F(1,3,-2) = (8, 6, -12)$
$\Rightarrow$ Tangentvektorn och ellipsoidens normal är parallella,
eftersom $(-4,-3,6) = -\frac{1}{2}(8, 6, -12)$.
$\Rightarrow$ Kurvan är vinkelrät mot ellipsoiden.

10. a) Egenvärden: $\begin{vmatrix} 19-\lambda & 18 \\ -27 & -26-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 18 \\ -1+\lambda & -26-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 18 \\ -1 & -26-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-8-\lambda) \qquad \lambda = 1$ och $\lambda = -8$.

Egenvektorer: $\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ -27 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -8 \quad \begin{pmatrix} 27 & 18 \\ -27 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3x + 2y = 0 \quad \begin{cases} x = -2t \\ y = 3t \end{cases} \quad X = t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

10 (forts.)

Svar: $\underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}}}$ och $\underline{\underline{P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}}$

b) Enligt a) $P^{-1}AP = D$

$D = D_0^3$ där $D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Då är $A = PDP^{-1}$

$= PD_0^3P^{-1} = PD_0P^{-1}PD_0P^{-1}PD_0D^{-1} = B^3$

där $B = PD_0P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}}}$