# Lösningar till tentamen den 4/6 2008
## Matematik II, SF 1609

1. Riktningsderivatan $D_v f(p) = \text{grad} f(p) \cdot v =$
$|\text{grad} f(p)||v| \cos\alpha$ är störst om $v = \dfrac{\text{grad} f(p)}{|\text{grad} f(p)|}$, då $\cos\alpha = 1$.
$\text{grad} f(x,y) = (2x + y\cos(xy),\ x\cos(xy))$ och
$\text{grad} f(1,0) = (2,1)$.

<u>Svar</u> a) I riktningen $\underline{(2,1)}$.

b) $|\text{grad} f(1,0)| = \underline{\sqrt{5}}$

2. a) Planet och linjen är parallella $\Leftrightarrow$ planets normal är vinkelrät mot linjens riktningsvektor

$(1,2,3a)\cdot(1,-3,5) = 0$ dvs. $-5 + 15a = 0$ $\quad \underline{a = \frac{1}{3}}$

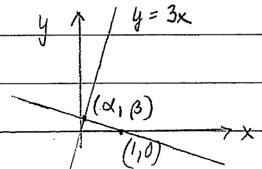
b) Om linjen ligger i planet, måste $a = \frac{1}{3}$. Planet är $x + 2y + z - 5 = 0$. Insättning av $x = 2+t$, $y = 1-3t$, $z = 5t$ i planets ekvation ger

$2 + t + 2(1-3t) + 5t - 5 = 0 \qquad -1 + t - 6t + 5t = 0$

Planet och linjen har inga gemensamma punkter.

Svar: <u>För inga värden av a.</u>

3. Punkten $(1,0)$ projiceras ortogonalt på en punkt $(\alpha,\beta)$ på linjen $y = 3x$.




Linjen som går genom punkterna $(\alpha,\beta)$ och $(1,0)$ har riktn. vektorn $\frac{\beta}{\alpha-1}$ och den är vinkelrät mot linjen $y = 3x$. $\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha-1}\cdot 3 = -1$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3\beta = 1-\alpha \\ \beta = 3\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9\alpha = 1-\alpha \qquad \alpha = \frac{1}{10},\ \beta = \frac{3}{10}$

Punkten $(0,1)$ projiceras på en punkt $(\gamma,\delta)$.

$\begin{cases} \frac{\delta-1}{\gamma}\cdot 3 = -1 \\ \delta = 3\gamma \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{3}{10},\ \delta = \frac{9}{10}$. Matrisen är $\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}}$

4. $A$ är diagonaliserbar. Låt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Då är $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$.

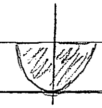
$\det P = 3$, $\quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{3} P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$

5. $f(x,y) = x^2 - 2xy + y$

1) Kritiska punkter: $\begin{cases} D_1 f(x,y) = 2x - 2y = 0 \\ D_2 f(x,y) = -2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.



2) Randen av området $x^2 \le y \le 1$:

a) $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$

$f(x,x^2) = x^2 - 2x^3 + x^2 = 2x^2 - 2x^3 = g(x)$

$g'(x) = 4x - 6x^2 = 2x(2-3x)$

| $x$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $2-3x$ | $+$ | | $+$ | | $-$ |
| $g'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |

$g(-1) = 4$, $\quad g(1) = 0$

$g(0) = 0$, $\quad g(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27}$

b) $y = 1$, $-1 \le x \le 1$ $\qquad f(x,1) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$0 \le f(x,1) \le 4$

1) och 2) $\Rightarrow$ Största värdet av $f$ är $4 = f(-1,1)$ och minsta värdet är $0 = f(0,0) = f(1,1)$.

6. Låt $G(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$. Jacobimatrisen av $G$ är $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$. Eftersom $g = f \circ G$, ger kedjeregeln

$D_1 g = 2x D_1 f + y D_2 f$, $\quad D_2 g = -2y D_1 f + x D_2 f$.

$\Rightarrow x D_1 g + y D_2 g = x(2x D_1 f + y D_2 f) + y(-2y D_1 f + x D_2 f)$
$= 2x^2 D_1 f + 2xy D_2 f - 2y^2 D_1 f = 2u D_1 f + 2v D_2 f.$

7. a) Kritiska punkter för $f(x,y) = x^4 + 3xy^2 + y^2$:

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 4x^3 + 3y^2 = 0 & (1) \\ D_2 f(x,y) = 6xy + 2y = 0 \iff 2y(3x+1) = 0 \end{cases}$$

$y = 0$ eller $x = -\frac{1}{3}$

(1) $\Rightarrow$ De kritiska punkterna är $\underline{(0,0)}$ och $\underline{\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{9}\right)}$.

$f(0,0) = 0$, $f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{81}$.

b) För $(0,0)$ är den kv. formen $Q(x,y) = y^2$, som är pos. semidefinit. $f(x,y) = (1+3x)y^2 + x^4 \geq 0 = f(0,0)$ nära origo.

$\Rightarrow$ Origo är en lokal minimipunkt.

$D_{11} f(x,y) = 12x^2$, $D_{12} f(x,y) = 6y$, $D_{22} f(x,y) = 6x + 2$. För punkterna $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{9}\right)$

$Q(h,k) = \frac{4}{3}h^2 \pm 2 \cdot \frac{12}{9} hk = \frac{4}{3}\left(h^2 \pm 2hk\right)$

$= \frac{4}{3}\left((h \pm k)^2 - k^2\right)$ som är indefinit.

$\underline{\text{Punkterna } \left(-\tfrac{1}{3}, \pm\tfrac{2}{9}\right) \text{ är sadelpunkter.}}$

8. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & k & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & k+6 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Om $k = -6$ vi får ekvationen $x - 3y + z = 3$.

$$\begin{cases} x = 3 + 3s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

Om $k \neq -6 \Rightarrow y = 0$, $x + z = 3$

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

9. Vi bestämmer egenvärden för matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & a \end{pmatrix}$ där $a = 0$ resp. $a = 1$.

$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 5 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(a - \lambda)$.

Egenvärden är $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$ om $a = 1$ och $\lambda = 0$ om $a = 0$.

v. g. vänd

9. (forts.) Egenvektorer för $\lambda = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & a \end{pmatrix}$ 1) Om $\underline{a = 0}$ $\Rightarrow 5x = 0$

$x = 0$, $y = s$, $z = t$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektorerna $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$ bildar inte bas för $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ Matrisen är inte diagonaliserbar.

2) Om $\underline{a = 1}$ $5x + z = 0 \Rightarrow$

$x = t$, $y = s$, $z = -5t$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektorerna $(1,0,-5)$ och $(0,1,0)$ tillsammans med en egenvektor som motsvarar egenvärdet 1 bildar en bas för $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ Matrisen är diagonaliserbar.

10. a) Låt $g(x,y,z) = x^2 - ze^{x+y+z}$.

Eftersom $D_3 g(x,y,z) = (-1-z)e^{x+y+z}$ och $D_3 g(0,0,0) = -1 \neq 0$, definiera ekv. $g(x,y,z) = 0$ en yta $z = f(x,y)$ i en omgivning av origo.

b) Gradienten av $g$ är $\left(2x - ze^{x+y+z}, -ze^{x+y+z}, (-1-z)e^{x+y+z}\right)$ och $\text{grad}\, g(0,0,0) = (0,0,-1)$.

Tangentplanet har ekvationen $0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-0) - (z-0) = 0$ dvs. $\underline{z = 0}$.