## Lösningar till tentamen den 15/12 2008
## Matematik II, SF 1609

1. Gradienten av $g(x,y,z)=x^3-y^2+xz$ är $(3x^2+z,-2y,x)$. En normal till tangentplanet i punkten $(2,1,-3)$ är $\operatorname{grad} g\,(2,1,-3)=(9,-2,2)$. Tangentplanets ekvation: $9(x-2)-2(y-1)+2(z+3)=0$ dvs. $9x-2y+2z-10=0$.

2. En normallinje till planet genom punkten $(1,2,1)$ har som riktningsvektor planets normal, till ex. $(1,-2,5)$.
Linjens ekvation: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=1+5t \end{cases}$
Skärningspunkten mellan linjen och planet är närmast punkten $(1,2,1)$. $1+t-2(2-2t)+5(1+5t)-8=0$
$30t-6=0 \quad t=\frac{1}{5}, \quad \Rightarrow$ Punkten är $\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5},2\right)$.

3. a) $T$:s matris är $[T]=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $\det[T]=1\neq 0 \Rightarrow T$ har invers $(=T^{-1})$

$T(x,y,z)=(a,b,c) \Leftrightarrow T^{-1}(a,b,c)=(x,y,z)$

$\begin{cases} x-y=a \\ y-z=b \\ z=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a+b+c \\ y=b+c \\ z=c \end{cases} \quad T^{-1}(a,b,c)=(a+b+c,\,b+c,\,c)$

4. De partiella derivatorna av $f(x,t)=g(x^2-t)$ är
$D_1f(x,t)=2x\,g'(x^2-t), \quad D_2f(x,t)=-g'(x^2-t)$
$D_{11}f(x,t)=2g'(x^2-t)+2x\,g''(x^2-t)\cdot 2x$
$D_{22}f(x,t)=g''(x^2-t). \quad \Rightarrow$
$D_{11}f(x,t)-4x^2D_{22}f(x,t)+2D_2f(x,t)=2g'(x^2-t)+4x^2g''(x^2-t)$
$-4x^2g''(x^2-t)-2g'(x^2-t)=0.$

5. $f(x,y)=3x-x^3-3xy^2$
Kritiska punkter: $\begin{cases} D_1f(x,y)=3-3x^2-3y^2=0 & (1)\\ D_2f(x,y)=-6xy=0 & (2)\end{cases}$
(2) $\Rightarrow x=0$ eller $y=0$
Om $x=0$ (1) $\Rightarrow y^2=1 \quad y=\pm1$
Om $y=0$ (1) $\Rightarrow x^2=1 \quad x=\pm 1$
Fyra kritiska punkter: $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$.
$(0,1)$: $f(h,1+k)=3h-h^3-3h(1+k)^2=-6hk-h^3-3hk^2$
$(0,-1)$: $f(h,-1+k)=6hk-h^3-3hk^2$
De kvadratiska formerna $\pm 6hk$ är indefinita $\Rightarrow$ punkterna $(0,\pm1)$ är sadelpunkter, $f(0,\pm1)=0$.
$(1,0)$: $f(1+h,k)=3(1+h)-(1+h)^3-3(1+h)k^2=3+\cancel{3h}-1$
$-\cancel{3h}-3h^2-h^3-3k^2-3hk^2=2-3(h^2+k^2)-h^3-3hk^2$
Den kvadr. formen $-3(h^2+k^2)$ är negativt definit $\Rightarrow$
$(1,0)$ är lokal max. punkt $f(1,0)=2$.
$(-1,0)$: $f(-1+h,k)=3(-1+h)-(-1+h)^3-3(-1+h)k^2$
$=-3+3h-(-1+3h-3h^2+h^3)+3k^2-3hk^2=-2+3(h^2+k^2)$
$-h^3-3hk^2$ Den kvadr. formen $3(h^2+k^2)$ är positivt def. $\Rightarrow (-1,0)$ är lokal min. punkt, $f(-1,0)=-2$

6. $\begin{pmatrix}1 & a & 4 & | & 1\\ a & 1 & 2 & | & 0\\ 2 & a & 8 & | & 2\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & a & 4 & | & 2\\ 0 & 1-a^2 & 2-4a & | & -a\\ 0 & -a & 0 & | & 0\end{pmatrix}$

1) $a\neq 0$ (3) $\Rightarrow y=0$, (2) $\Rightarrow (2-4a)z=-a$

Om $a=\frac{1}{2}$, finns ingen lösning.

Om $a\neq\frac12$, $a\neq 0$ $\quad z=-\frac{a}{2-4a} \quad$ (1) $\Rightarrow x=1-4z=\frac{1}{1-2a}$
$\Rightarrow x=\frac{1}{1-2a}, \quad y=0, \quad z=\frac{a}{4a-2}$

2) $a=0$. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & | & 1\\ 0 & 1 & 2 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=1-4t\\ y=-2t\\ z=t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$

7. $T(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 2x$

1) $D_1 T = 6x - 2$ En kritisk punkt: $(\frac{1}{3}, 0)$

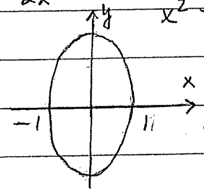
$D_2 T = 4y$ $T(\frac{1}{3}, 0) = 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \underline{-\frac{1}{3}}$

2) Randen $4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - 4x^2$

På ellipsen $T(x,y) = 3x^2 + 2(4 - 4x^2) - 2x$

$= 8 - 2x - 5x^2 = g(x)$.

Vi bestämmer g:s största och minsta värde på $[-1, 1]$.




$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$-1 \le x \le 1$

$g'(x) = -2 - 10x = 0$ om $x = -\frac{1}{5}$

$g(-\frac{1}{5}) = 8 + \frac{2}{5} - \frac{5}{25} = \underline{8\frac{1}{5}}$

I ändpunkterna $g(-1) = \underline{5}$, $g(1) = \underline{1}$

1) och 2) $\Rightarrow$ $-\frac{1}{3}$ är den lägsta och $8\frac{1}{5}$ den högsta temperaturen.

$x = -\frac{1}{5} \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{4}{25} = \frac{4}{25} \cdot 24$ $y = \pm \frac{4}{5}\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{T(-\frac{1}{5}, \pm\frac{4}{5}\sqrt{6}) = 8\frac{1}{5}}}$ är den högsta och

$\underline{\underline{T(\frac{1}{3}, 0) = -\frac{1}{3}}}$ den lägsta temperaturen.

8. a) $\begin{cases} r(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t}, 1 - \frac{1}{4}t^2) \\ x^2 + y^2 - 8z = 4 \end{cases} \Rightarrow t + t - 8(1 - \frac{1}{4}t^2) = 4$

$2t - 8 + 2t^2 - 4 = 0$ $t^2 + t - 6 = 0$ $t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$t = 2$, $(t = -3)$. Skärningspunkten är $\underline{\underline{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)}}$

b) $r'(t) = (\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{2\sqrt{t}}, -\frac{1}{2}t)$

I skärningspunkten är $r'(2) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -1)$ tangentvektor till kurvan.

Gradienten för $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 8z$ är $(2x, 2y, -8)$.

$\Rightarrow$ I punkten $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ är $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -8)$ normal till ytan. Normalen $= 8 \cdot r'(2)$ $\Rightarrow$ Kurvan är vinkelrät mot ytan.

9. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$. A:s egenvärden är 2 och $-3$.

Vi bestämmer egenvektorerna för $\lambda = 2$.

$(A - 2I)X = \bar{0}$ $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow y + z = 0$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = s \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ $X = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För egenvärdet $\lambda = -3$ finns egenvektorer.

Antag att $Av = -3v$, $v \ne \bar{0}$ (Till exempel $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

Egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $v$ är linjärt oberoende.

$\Rightarrow$ A är diagonaliserbar.

10. Låt $A = ([C_1]\ [C_2]\ \cdots [C_p])$ där $[C_1], \dots, [C_p]$ är A:s kolonner, $C_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, p$.

$$A^t A = \begin{pmatrix} [C_1]^t \\ \vdots \\ [C_p]^t \end{pmatrix} ([C_1] \cdots [C_p]) = \begin{pmatrix} [C_1]^t[C_1] & \cdots & [C_1]^t[C_p] \\ \vdots & \ddots & \\ [C_p]^t[C_1] & \cdots & [C_p]^t[C_p] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \cdot C_1 & \cdots & C_1 \cdot C_p \\ \vdots & & \\ C_p \cdot C_1 & \cdots & C_p \cdot C_p \end{pmatrix}$$

Om $A^t A = D$, en diagonalmatris, så är $D = \begin{pmatrix} |C_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |C_p|^2 \end{pmatrix}$

och $C_i \cdot C_j = 0$ för $i \ne j$ dvs. kolonnerna är ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$.