Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Matematik II för Media, SF1609

Måndagen den 15 december 2008, kl 14.00-19.00.

Preliminära betygsgränser för E, D, C, B och A är 18, 22, 26, 32 och 36 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^3 - y^2 + xz = 1$ i punkten $(2, 1, -3)$. (3p)

2. Vilken punkt i planet $x - 2y + 5z - 8 = 0$ är närmast punkten $(1, 2, 1)$? (3p)

3. En linjär avbildning $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definieras genom $T(x, y, z) = (x - y, y - z, z)$.
a) Bestäm T:s matris i standardbasen.
b) Visa att T har invers ($=T^{-1}$) och bestäm $T^{-1}(a, b, c)$. (3p)

4. Antag att funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är två gånger deriverbar. Låt $f(x, t) = g(x^2 - t)$. Visa att funktionen

$$D_{11}f(x, t) - 4x^2 D_{22}f(x, t) + 2D_2 f(x, t) = 0$$

i alla punkter (x, t). (4p)

5. Sök alla kritiska (=stationära) punkter till funktionen $f(x, y) = 3x - x^3 - 3xy^2$ och undersök om de är lokala extrempunkter. (4p)

6. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + 4z = 1 \\ ax + y + 2z = 0 \\ 2x + ay + 8z = 2 \end{cases}$$

för varje värde på konstanten a. (4p)

v.g. vänd

7. Temperaturen på en ellipsformad platta $D = \{(x,y) : 4x^2 + y^2 \leq 4\}$ är $T(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 2x$. I vilka punkter i D är temperaturen högst resp. lägst och vad är temperaturen i dessa punkter? (4p)

8. a) Bestäm skärningspunkten mellan kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t}, 1 - \frac{t^2}{4}), \quad t \geq 0$$

och ytan $x^2 + y^2 - 8z = 4$.
b)Visa att kurvan är i skärningspunkten vinkelrät mot ytan. (5p)

9. Kan matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonaliseras? (5p)

10. Antag att A är en matris av typ $n \times p$. Visa att om $A^t A = D$ där D är en diagonalmatris och $\det D \neq 0$, så är A:s kolonnvektorer ortogonala.
(n och p är heltal, $n \geq p \geq 2$). (5p)
