Lösningar till tentamen den 8/6 2009

Matematik II, SF 1609

1. Hastigheten är $r'(t) = (-\sin t,\ 3\cos t,\ 3)$ och farten $|r'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + 9\cos^2 t + 9}$. $|r'(t)| = 4 \iff$
$\sin^2 t + 9(1-\sin^2 t) + 9 = 16$, $8\sin^2 t = 2$, $\sin^2 t = \frac{1}{4}$
$\sin t = (\pm)\ \frac{1}{2}$, $0 < t < \pi \implies t = \frac{\pi}{6}$ eller $t = \frac{5\pi}{6}$.
När farten är 4 är $r(t) = (\cos t,\ 3\sin t,\ 3t) =$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ eller $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$.

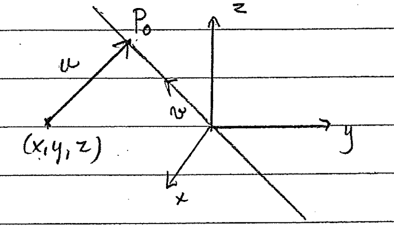
2. A är diagonaliserbar $\Rightarrow$ Det finns en inverterbar matris P och en diagonalmatris D så att $P^{-1}AP = D$.
Då är $AP = PD$, $A^2P = APD = PD^2 \Rightarrow P^{-1}A^2P = D^2$.
Eftersom D^2 är också en diagonalmatris, är A^2 diagonaliserbar.

3. $f(x,y) = 6x^2 - x^3 + 6xy + 3y^2$
Kritiska punkter: $D_1 f(x,y) = 12x - 3x^2 + 6y$, $D_2 f(x,y) = 6x + 6y$

$$\begin{cases} 3(4x - x^2 + 2y) = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x \qquad 4x - x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0$$

De kritiska punkterna är $(0,0)$ och $(2,-2)$.
I origo är den kvadratiska formen $q(h,k) = 6h^2 + 6hk + 3k^2$
$= 6\left(\left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right) + 3k^2 = 6\left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{2}k^2$
som är positivt definit.
$(0,0)$ är en lokal minimipunkt, $f(0,0) = 0$.
I punkten $p_0 = (2,-2)$ är $q(h,k) = \frac{1}{2}\left(D_{11}f(p_0)h^2 + 2D_{12}f(p_0)hk + D_{22}f(p_0)k^2\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 2\cdot 6hk + 6k^2\right) = 6hk + 3k^2$
$= 3\left((h+k)^2 - h^2\right)$ indefinit
$(2,-2)$ är en sadelpunkt, $f(2,-2) = 4$.

4. Linjens riktningsvektor

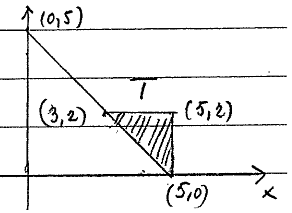


$v = (1,-1,2)$, $u \perp v$
$u = (t_0 - x,\ -t_0 - y,\ 2t_0 - z)$
där $P_0: (t_0, -t_0, 2t_0)$.
$u \cdot v = 0 \Rightarrow t_0 - x + t_0 + y + 2(2t_0 - z) = 0$
dvs. $6t_0 - x + y - 2z = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{6}(x - y + 2z)$
Om A är avbildningens matris,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ -t_0 \\ 2t_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -x + y - 2z \\ 2x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. T är triangeln $x + y \geq 5$, $y \leq 2$, $x \leq 5$.



$f(x,y) = x^3 + y^3$ har endast en kritisk punkt: $\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$
$(0,0) \notin T$.

Randen: I: $x = 5$, $0 \leq y \leq 2$
$f(5,y) = 125 + y^3$ är växande $f(5,0) \leq f(5,y) \leq f(5,2)$
Minsta värdet är 125 och största $125 + 8 = 133$
II $y = 2$ $3 \leq x \leq 5$ $f(x,2) = 8 + x^3$
Minsta värdet $8 + 3^3 = 35$, största 133
III $y = 5 - x$, $3 \leq x \leq 5$
$f(x, 5-x) = x^3 + (5-x)^3 = x^3 + 125 - 75x + 15x^2 - x^3$
$= 5(3x^2 - 15x + 25) = g(x)$
$g'(x) = 5(6x - 15) = 0$ om $x = \frac{5}{2}$ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \notin T$.

Största värdet är $f(5,2) = 133$
Minsta värdet är $f(3,2) = 35$

6. Vi kan skriva $f = g \circ h$ där $h(x,y) = (x^2-y,\ y^2-x)$. Jacobimatrisen av h är $J_h = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$. Enligt kedjeregeln

$D_1 f(x,y) = 2x\, D_1 g(p) - D_2 g(p)$ och

$D_2 f(x,y) = -D_1 g(p) + 2y\, D_2 g(p)$ där

$p = (x^2-y,\ y^2-x)$.

7. Koefficientmatrisen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & a & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-1) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & a-2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-3 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1) $a = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$y + 3z - 2u = 0$. Låt $u = t$, $z = s$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = s - 3t \\ y = -3s + 2t \\ z = s \\ u = t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

2) $a \neq 3$ Division med $a-3$ ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & -2 \end{pmatrix} -(a-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = -7t \\ y = 0 \\ z = 2t \\ u = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

8. a) $Q(x,y,z) = x^2 + 4xz + 2y^2 + 12yz + 22z^2$

$= (x+2z)^2 + 2y^2 + 12yz + 18z^2 = (x+2z)^2 + 2(y+3z)^2$

$Q(x,y,z) \geq 0$. $Q(x,y,z) = 0$ om $x = -2z$, $y = -3z$,

dvs. $Q(-2z, -3z, z) = 0$

$\Rightarrow Q$ är inte positivt definit.

8. (forts.) b) $q(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = (x\ \ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ om $\lambda = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = \frac{7 \pm 5}{2}$

A:s egenvärden är 6 och 1. Diagonalformen är

$q(x'\ y') = 6x'^2 + y'^2$.

9. Låt $F(x,y,z) = xy^2 - 3x^2 z + z^3$.

$D_3 F(x,y,z) = -3x^2 + 3z^2 = 3(z^2 - x^2) \Rightarrow D_3 F(-1, \sqrt{2}, 2) = 9$

Eftersom $D_3 F(-1, \sqrt{2}, 2) \neq 0$, definierar ekvationen $F(x,y,z) = 0$ en yta $z = f(x,y)$ i en omgivning av $(-1, \sqrt{2})$.

Derivering m.a.p. x resp. y ger

$$\begin{cases} y^2 - 6xf - 3x^2 D_1 f + 3z^2 D_1 f = 0 \\ 2xy - 3x^2 D_2 f + 3z^2 D_2 f = 0 \end{cases}$$

I punkten $(-1, \sqrt{2}, 2)$ blir ekvationerna $2 + 12 - 3D_1 f + 12 D_1 f = 0$ resp.

$-2\sqrt{2} - 3D_2 f + 12 D_2 f = 0 \Rightarrow$

$D_1 f(-1, \sqrt{2}) = -\frac{14}{9}$ och $D_2 f(-1, \sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{9}$

10. Gradienten till $F(x,y,z) = x^2 y - 4y^3 - z$ är en normal till ytans tangentplan i ytans punkt (x,y,z).

$\operatorname{grad} F(x,y,z) = (2xy,\ x^2 - 12y^2,\ -1)$.

Planen är parallella om $\operatorname{grad} F(x,y,z)$ är parallell med ytans normal $(2,1,-1)$.

$\Rightarrow (2xy,\ x^2 - 12y^2,\ -1) = t(2,1,-1) \Rightarrow t = 1$,

$x^2 - 12y^2 = t = 1$, $2xy = 2t = 2$ $\quad \begin{cases} x^2 - 12y^2 = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$x^2 - 12 \cdot \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$, $x^2 = \frac{1}{2} (\pm) \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$

$x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad z = y(x^2 - 4y^2) = \pm\frac{1}{2}(4-1)$

Punkterna är $\pm\left(2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.