Lösningar till tentamen i kurs SF1609 (5B116, 5B1136) Matematik II 100113.

Linjär algebra

1. Om A har invers fås $X = B^T A^{-1}$. Vi söker inversen på sedvanligt sätt enligt algoritmen $[A|I] \to \ldots \to [I|A^{-1}]$. Resultatet är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 49 & -16 & -19 \\ 3 & -1 & -1 \\ -18 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. Detta ger

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49 & -16 & -19 \\ 3 & -1 & -1 \\ -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 5 & 6 \\ 43 & -14 & -17 \end{bmatrix}.$$

2. Vi beräknar determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$. Detta visar att vektorerna duger som bas för $a \neq 1$. Låt koordinatvektorn ges av (a,b,c). Då skall gälla att $a(1,2,0) + b(1,1,2) + c(1,2,1) = (1,1,1)$. Detta ger systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ Ur detta fås koordinatvektorn $(a,b,c) = (1,1,-1)$.

3. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,6.$$

$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det ger egenvektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t,\ -\infty < t < +\infty$

$\lambda = 6: \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det ger egenvektorerna

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t,\ -\infty < t < +\infty$. Vi väljer $t = 1$ och normerar. En matris som diagonaliserar A ortogonalt är

$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ som ger diagonalmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

4. Låt $\bar{v}$ och $\bar{n}$ vara linjens riktningsvektor respektive planets normalvektor. En riktningsvektor för den sökta linjen ges då av $\bar{u} = \bar{v} - proj_{\bar{n}} \bar{v}$. Vi avläser att $\bar{v} = (3,5,1)$ och $\bar{n} = (2,1,-2)$ vilket ger projektionsvektorn:

$$proj_{\bar{n}} \bar{v} = \frac{(\bar{v} \cdot \bar{n})}{\|\bar{n}\|^2} \bar{n} = \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2^2 + 1^2 + (-2)^2} (2,1,-2) = (2,1,-2) \Rightarrow \bar{u} = (3,5,1) - (2,1,-2) = (1,4,3).$$

En punkt på den sökta linjen är skärningspunkten mellan den givna linjen och planet.

Parametervärdet för den fås genom insättning av den givna linjen i planets ekvation: $2(4+3t)+5t-2(-2+t)-3=0 \Rightarrow t=-1$. Det ger punkten (1,-5,-3). Den sökta linjen har alltså ekvationen $(x,y,z)=(1,-5,-3)+t(1,4,3)\quad(-\infty<t<+\infty)$.

5. Avbildningens matris är $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Linjen har parameterekv $\begin{cases}x= & t\\ y=3-2t\end{cases}$.

Bildmängden ges av

$$A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A(\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}t)=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}t=\begin{bmatrix}-9\\ -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\ 3\end{bmatrix}t.$$

Bilden är alltså linjen $\begin{cases}x=-9+8t\\ y=-3+3t\end{cases}$. Genom att eliminera parametern t fås ekvationen $3x-8y+3=0$.

Flervariabelanalys

6. Riktningsderivatan av f i punkten P i riktningen $\bar{u}$ ges av $D_{\bar{u}}f(P)=\nabla f(P)\cdot\bar{u}$ där $\bar{u}$ är en enhetsvektor. Vi får $\nabla f=(\frac{y}{(3y-5x)^2},-\frac{x}{(3y-5x)^2})$. Riktningsvektorn ges av $(4,-2)-(1,2)=(3,-4)$ dvs $\bar{u}=\frac{1}{5}(3,-4)$. Detta ger $D_{\bar{u}}f(1,2)=(2,-1)\cdot(3,-4)/5=2$. Det maximala värdet är $\|\nabla f(1,2)\|=\sqrt{5}$.

7. De kritiska punkterna fås ur systemet

$$\begin{cases}f_1=1+3x^2+2y=0 & (1)\\ f_2=-2+2x-4y=0 & (2)\end{cases}\quad 2(1)+(2)\Rightarrow 6x^2+2x=0\Rightarrow x=0,-\frac{1}{3}.$$ Insättning i (2) ger punkterna $(0,-\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$. Vi undersöker karaktären:

$A=f_{11}=6x,\ B=f_{12}=2,\ C=f_{22}=-4\Rightarrow D=AC-B^2=-24x-4$.

$(0,-\frac{1}{2}): D=-4<0\Rightarrow$ sadelpunkt $\quad(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}): D=4>0,\ A=-2<0\Rightarrow$ max.

8. f antar ett största och ett minsta värde eftersom f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat område. Dessa värden antas i en inre kritisk punkt eller i en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Först studerar vi det inre av området:

$$\begin{cases}f_1=2xy-4y=0 & (1)\Rightarrow 2y(x-2)=0\\ f_2=x^2-4x+4y=0 & (2)\end{cases}$$

$y=0$ ger i (2) : $x=0,4$ och $x=2$ ger i (2) : $y=1$. Detta ger punkterna (0,0), (4,0) och (2,1). varav endast (2,1) ligger i det inre av området. Vi studerar nu områdets randkurva:

I $y=0$: $f(x,0)=0$

II $x=4$: $g(y)=f(4,y)=2y^2$, $0\le y\le 16\Rightarrow g$ är växande. Ändpunkterna är intressanta.

III $y = x^2$: $g(x) = 3x^4 - 4x^3$, $0 \le x \le 4 \Rightarrow g'(x) = 12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0{,}1$.
Sammanfattningsvis har vi de intressanta punkterna:
(0,0) , (4,0) , (4,16) , (2,1) och (1,1) där f antar värdena 0, 0, 512, -2 och -1 resp. Det innebär att det största värdet är 512 och det minsta är -2 .

9. Låt $F = x^4 + y^4 + 4z - 9$, $G = x + 3y + 2z - 7$. I punkten (0,1,2) fås $F = G = 0$ och

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x^3 & 4y^3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12x^3 - 4y^3$$. I punkten (0,1,2) är detta $-4 \neq 0$.

Detta visar existensen av de två funktionerna. Dessa är deriverbara och vi får genom implicit derivering map z i det givna ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 4x^3x' + 4y^3y' + 4 = 0 \\ x' + \quad 3y' + 2 = 0 \end{cases}$$. I punkten (0,1,2) fås $$\begin{cases} 4y' + 4 = 0 \\ x' + 3y' + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x'(2) = 1$$.

10. f är kontinuerlig i origo om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Om vi går in mot origo längs $y-$axeln blir gränsvärdet 0 eftersom $f(0,y) = 0$. Om vi i stället går in mot origo längs kurvan $y = -x^{2/3}$ $(y^3 = -x^2)$ blir gränsvärdet -1 . Det betyder att f inte är kontinuerlig i origo.

De partiella derivatorna i origo existerar dock:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$