KTH Matematik

Tentamen i kursen SF1609 (5B1116, 5B1136) Matematik II .
Onsdagen den 13 januari 2010 kl 0800-1300.

För godkänt betyg (E) krävs minst 15 poäng.
De som uppnår 13 eller 14 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen.
För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 19, 23, 27 resp 31 poäng.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Linjär algebra

1. Bestäm matrisen X i matrisekvationen $XA = B^t$ där
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3p)

2. Låt $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ vara standardbasen i $\mathbf{R}^3$ och betrakta vektorerna
$\overline{u}_1 = \overline{e}_1 + a\overline{e}_2$, $\overline{u}_2 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + a\overline{e}_3$, $\overline{u}_3 = \overline{e}_1 + a\overline{e}_2 + \overline{e}_3$. För vilka värden på konstanten a utgör $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ en bas i $\mathbf{R}^3$? Bestäm koordinatvektorn för vektorn $(1,1,1)$ i den bas där $a = 2$. (3p)

3. Utför en ortogonal diagonalisering av matrisen
$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Ange den matris som diagonaliserar A och den diagonala matrisen. (3p)

4. En linje $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5t \\ z = -2 + t \end{cases}$ och ett plan $2x + y - 2z - 3 = 0$ är givna. Bestäm ekvationen för den linje som är den givna linjens ortogonala projektion på planet. (4p)

5. En linjär operator $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uppfyller att $T(1,0) = (2,1)$ och $T(0,1) = (-3,-1)$. Bestäm bilden av linjen $2x + y - 3 = 0$. (4p)

Flervariabelanalys

6. Beräkna riktningsderivatan i punkten $(1,2)$ av funktionen $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{3y - 5x}$ i riktning mot punkten $(4,-2)$. Ange även det maximala värde som riktningsderivatan i punkten $(1,2)$ kan anta. (3p)

VGV

7. Bestäm de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y) = x - 2y + x^3 + 2xy - 2y^2$ och avgör deras karaktär. (3p)

8. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 y - 4xy + 2y^2$ i den mängd som ges av olikheterna $0 \le x \le 4$ och $0 \le y \le x^2$. (4p)

9. Visa att det finns funktioner $x = x(z)$ och $y = y(z)$ som i en omgivning av punkten $(0,1,2)$ satisfierar ekvationssystemet
$\begin{cases} x^4 + y^4 + 4z = 9 \\ x + 3y \quad + 2z = 7 \end{cases}$. Beräkna $x'(2)$. (4p)

10. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^4 + (x^2 + y^3)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Avgör om f är kontinuerlig i origo. Existerar de partiella förstaderivatorna i origo? (4p)