Lösningar till tentamen i kurs SF1609 (5B116, 5B1136) Matematik II 100824.

Linjär algebra

1. $AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$. Determinanten beräknas:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 0$. Det betyder att matrisen saknar invers för varje värde på a.

2. En riktningsvektor för linjen är (2,3,-2) - (1,-2,3) = (1,5,-5) . En parametrisering av linjen är då $(x, y, z) = (1,-2,3) + t(1,5,-5)$, $-\infty < t < +\infty$. Parametervärdet för skärningspunkten fås genom insättning i planets ekvation:
$2(1+t) + 3(-2+5t) + 4(3-5t) = -1 \Rightarrow t = 3$. Insättning i linjens vektorekvation ger skärningspunkten (4,13,-12) .

3. $\bar{v}$ är en egenvektor till matrisen A om $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ där λ är en skalär.
$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Det betyder att alla utom vektorn (1,3,2) är egenvektorer till matrisen. Vi ser också att egenvärdena är -1, 1 och 3. Då dessa är olika är matrisen diagonaliserbar.

4. Vi diagonaliserar A : Karakteristiska ekvationen är
$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -(5+\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+5)+18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2,1.$ Egenvektorer söks:

$\lambda = -2: \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}t$

$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}t$

Vi väljer $t = 1$ i båda fallen och får

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Då är $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ur detta fås

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^7 = PD^7P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^7 & 0 \\ 0 & 1^7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 258 \\ -129 & -258 \end{bmatrix}.$$

5. Skärningslinjen fås ur systemet

$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ y+z=2 \end{cases}$. $z=t \Rightarrow y=2-t \Rightarrow x=-3+2t$. Skärningslinjens ekv på parameter-

form är alltså $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2 \quad -t \\ z= \qquad t \end{cases}$. Låt P vara punkten (1,0,1) och Q punkten (-3,2,0)

på skärningslinjen. Vi bildar vektorn $\bar{u}=(4,-2,1)$ från Q till P. Denna vektor projiseras ortogonalt på skärningslinjens riktningsvektor $\bar{v}=(2,-1,1)$. Det ger vektorn

$\bar{w}=\dfrac{(\bar{u}\cdot\bar{v})}{\|\bar{v}\|^2}\bar{v}=\dfrac{11}{6}(2,-1,1)$. Det sökta avståndet ges av

$$\|\bar{u}-\bar{w}\|=\left\|(4,-2,1)-\frac{11}{6}(2,-1,1)\right\|=\frac{1}{6}\|(2,-1,-5)\|=\frac{\sqrt{30}}{6}\,le\,.$$

Flervariabelanalys

6. En normalvektor till ytan ges av $\nabla(2xy+\frac{z}{x}+\ln(z-y))=(2y-\frac{z}{x^2},2x-\frac{1}{z-y},\frac{1}{x}+\frac{1}{z-y})$.
I punkten (1,2,3) Fås normalvektorn (1,1,2) vilket ger tangentplansekvationen $x+y+2z=C$. Insättning av punkten ger $C=9$.

7. Det minsta värdet är $-\|\nabla f(1,2)\|$ och antas i den riktning som ges av $-\nabla f(1,2)$.
$f_1=\dfrac{3}{\sqrt{3x-y}}$, $f_2=-\dfrac{1}{\sqrt{3x-y}} \Rightarrow \nabla f(1,2)=(3,-1) \Rightarrow \|\nabla f(1,2)\|=\sqrt{10}$.
Det minsta värdet är alltså $-\sqrt{10}$ och det antas i riktningen (3,-1).

8. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Området begränsas av en ellipsbåge och ett linjestycke. Vi studerar först det inre:
$\begin{cases} f_1=y=0 \\ f_2=x=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ som inte är en inre punkt. Vi studerar sedan randen: På linjestycket
$y=7$ fås $g(x)=f(x,7)=7x$, $-2\le x\le 2$. g saknar kritiska punkter. Randpunkterna ger $g(-2)=-14$, $g(2)=14$. Kritiska punkter på ellipsen fås t ex med hjälp av Lagranges multiplikatormetod: Låt $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+4y^2-200)$. Vi får systemet
$\begin{cases} L_1=y+2\lambda x=0 \quad (1) \\ L_2=x+8\lambda y=0 \quad (2) \\ L_3=x^2+4y^2-200=0 \quad (3) \end{cases}$ Ur (1) och (2) fås $\lambda=-\dfrac{y}{2x}=-\dfrac{x}{8y} \Rightarrow x^2=4y^2$.
Insättning i (3) ger $x^2=100 \Rightarrow x=\pm 10 \Rightarrow y=\pm 5$. Detta ger punkter som dock inte ligger på ”vår” del av ellipsen. Det största värdet är alltså 14 och det minsta är -14.

9. Låt

$F(x,y,z) = x + y + z - \sin xyz \Rightarrow F(0,0,0) = 0$. $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - xy\cos xyz \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$.

Då ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F = 0$ definierar z som en kontinuerligt deriverbar funktion $z = f(x,y)$ i en omgivning av (0,0,0) . $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ fås genom implicit derivering i ekvationen $x + y + z - \sin xyz = 0$:

$$1 + \frac{\partial f}{\partial x} - yz\cos xyz - xy\frac{\partial f}{\partial x}\cos xyz = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$$

$$1 + \frac{\partial f}{\partial y} - xz\cos xyz - xy\frac{\partial f}{\partial y}\cos xyz = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$$

En normalvektor till funktionsytan $z = f(x,y)$: $(-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1)$. I origo fås normalvektorn (1,1,1).

10. $\begin{cases} f_x' = x - yz \\ f_y' = y^3 - xz \\ f_z' = z^5 xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}'' = 1\ ,\ f_{xy}'' = -z\ ,\ f_{xz}'' = -y \\ f_{yy}'' = 3y^2\ ,\ f_{yz}'' = -x \\ f_{zz}'' = 5z^4 \end{cases}$ Vi ser att i punkten (1,1,1)

gäller att $grad\, f =$ (0,0,0) och att Hessematrisen ges av $H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

(1,1,1) är alltså en kritisk punkt. Dess karaktär kan fås genom att studera tecken-växlingen hos Hessematrisens huvuddiagonaldeterminanter:

$$\det[1] = 1\ ,\ \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 2\ ,\ \det H = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 4.$$

Då alla dessa har positivt tecken är andragradsformen positivt definit och f har ett lokalt minimum i punkten (1,1,1) .