Lösningar till tentamen i kurs SF1609 (5B116, 5B1136) Matematik II 110111.

Linjär algebra

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a \\ a & 1-a & 1 \end{vmatrix} = (a+1) - a(1-a) = a^2 + 1 \neq 0$ för alla $a \Rightarrow$ inverterbarhet.

   För $a = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Låt punkterna betecknas A, B resp C. Vi bildar vektorerna från A till B resp från A till C: $(1,1,2)-(2,0,-1)=(-1,1,3)$ och $(3,1,-2)-(2,0,-1)=(1,1,-1)$.

   En normalvektor till planet ges då av $(-1,1,3)\times(1,1,-1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4,2,-2)$.

   Vi väljer $\bar{n} = (2,-1,1)$. Det ger planets ekvation: $2x - y + z = K$. Insättning av valfri punkt ger $K = 3$. Vinkeln θ mellan planets normalvektor och linjen fås ur skalärprodukten mellan $\bar{n}$ och linjens riktningsvektor $\bar{v} = (1,1,2)$:

$$\bar{n}\cdot\bar{v} = \begin{cases} (2,-1,1)\cdot(1,1,2) = 2-1+2 = 3 \\ \|\bar{n}\|\|\bar{v}\|\cos\theta = \sqrt{6}\sqrt{6}\cos\theta = 6\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$ Vinkeln

   mellan planet och linjen är då $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

3. Frågan avgörs av om ekvationen $C_1\bar{v}_1 + C_2\bar{v}_2 + C_3\bar{v}_3 + C_4\bar{v}_4 = \bar{0}$ endast har triviala lösningen eller om det finns oändligt många lösningar. Ekvationen ger systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{bmatrix}.$$ Ett homogent system med fler variabler än ekvationer har

   alltid oändligt många lösningar. Alltså är S en linjärt beroende mängd. För att se om vektorn $(0,1,0)$ kan uttryckas som en linjärkombination av vektorerna byter vi ut nollvektorn mot denna vektor i systemet ovan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 13 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & -1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger oändligt många lösningar dvs vektorn $(0,1,0)$ kan uttryckas som en linjärkombination av de givna vektorerna.

4. Vi ser direkt att A är symmetrisk för $a = 0$ vilket krävs för ortogonal diagonalisering. Vi söker matrisens egenvärden :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & a \\ 4 & 7-\lambda & a^2+a \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\left[(\lambda-1)(\lambda-7)-16\right] = -(1+\lambda)(\lambda^2-8\lambda-9) = 0 .$$

Detta ger egenvärdena $\lambda = -1,-1,9$. $\lambda = 9$ har ett en-dimensionellt egenrum. Frågan om diagonaliserbarhet beror på dimensionen hos egenrummet till $\lambda = -1$. Vi söker egenvektorerna för olika värden på a :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & a & 0 \\ 4 & 8 & a^2+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Om $a \neq 0,1$ så får vi en parameter i lösningen och egenrummet blir en-dimensionellt. Då kan vi endast finna två linjärt oberoende egenvektorer till A som då ej är diagonaliserbar.

Om $a = 1$ får vi två parametrar i lösningen och egenrummet blir två-dimensionellt. Då kan vi finna tre linjärt oberoende egenvektorer till A som då är diagonaliserbar. Fallet $a = 0$ behandlades inledningsvis.

5. På matrisform kan ekvationen skrivas $\bar{x}^T A\bar{x} + K\bar{x} - 75 = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ och $K = \begin{bmatrix} -10 & 70 \end{bmatrix}$. Vi vill diagonalisera A ortogonalt och söker egenvärden och egenvektorer. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A . Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-9)(\lambda-16)-144 = \lambda(\lambda-25) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,25 .$$

Normerade egenvektorer söks:

$$\lambda = 0: \quad \begin{bmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 25: \quad \begin{bmatrix} -16 & 12 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi väljer $P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det P = +1$ och koordinattransformationen $\bar{x} = P\bar{x}'$ är en rotation. Insättning i matrisekvationen ovan ger

$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + K(P\bar{x}') - 75 = 0 \Rightarrow (\bar{x}')^T (P^T AP)\bar{x}' + KP\bar{x}' - 75 = 0$. Då $P^T AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

och $KP = \begin{bmatrix} -10 & 70 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 50 \end{bmatrix}$ får vi med $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$:

$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 75 = 0 \Rightarrow (x')^2 + 2x' + 2y' - 3 = 0$. Kvadratkomp-

lettering ger $(x'+1)^2 + 2(y'-2) = 0$. Med koordinatbytet $\begin{cases} x'' = x'+1 \\ y'' = y'-2 \end{cases}$ som är en

translation fås slutligen $(x'')^2 + 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{2}(x'')^2$ dvs kurvan är en parabel.

Flervariabelanalys

6. Riktningsderivatan i riktningen $\bar{u}$ ges av $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$ där $\nabla f = (f_1, f_2)$ och riktningsvektorn $\bar{u}$ uppfyller $\|\bar{u}\| = 1$. $\nabla f \cdot \bar{u} = \|\nabla f\| \|\bar{u}\| \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta$ är som störst då vinkeln θ mellan ∇f och $\bar{u}$ är 0 radianer. Då fås $D_{\bar{u}} f(1,2) = \|\nabla f(1,2)\|$.
$\nabla f = (y - \dfrac{5}{x+y^2}, x - \dfrac{10y}{x+y^2}) \Rightarrow \nabla f(1,2) = (1,-3)$. Det största värdet är alltså
$\|(1,-3)\| = \sqrt{10}$.

7. De kritiska punkterna fås ur systemet
$\begin{cases} f_1 = 3x^2 + 6y - 9 = 0 \quad (1) \\ f_2 = 6x + 6y = 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1,3$. De kritiska
punkterna är då (-1,1) och (3,-3) . Vi undersöker karaktären:
$A = f_{11} = 6x,\ B = f_{12} = 6,\ C = f_{22} = 6 \Rightarrow D = AC - B^2 = 36x - 36$.
(-1,1): D < 0 sadelpunkt, $(3,-3): D > 0,\ A > 0$ minpunkt.

8. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Området är en origocentrerad cirkelskiva med radien 3 .Vi studerar först det inre:
$\begin{cases} f_1 = y = 0 \\ f_2 = x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3,0)$ som inte är en inre punkt. Vi studerar sedan randen $x^2 + y^2 = 9$
som parametriseras: $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$. Detta ger

$g(t) = f(3\cos t, 3\sin t) = 9\sin t(\cos t - 1) \Rightarrow g'(t) = 9(\cos t(\cos t - 1) + \sin t(-\sin t)) =$

$= 9(2\cos^2 t - \cos t - 1) = 0 \Rightarrow \cos t = -\frac{1}{2}, 1$.

Det första värdet ger $x = -\frac{3}{2},\ y = \pm 3\sqrt{1 - 1/4} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$. I dessa punkter är $f = \pm\frac{27}{4}\sqrt{3}$.
Det andra värdet ger $x = 3,\ y = 0$. I denna punkt är $f = 0$. Denna punkt svarar också mot parameterintervallets ändpunkter.
Det största värdet är alltså $\frac{27}{4}\sqrt{3}$ och det minsta är $-\frac{27}{4}\sqrt{3}$.

9. Riktningsderivatan $D_{\bar{u}} f = grad f \cdot \bar{u}$ där $\|\bar{u}\| = 1 \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{5}(4,3)$. Vi söker derivatorna $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$. Implicit derivering map x resp y i ekvationen ger

$$\begin{cases} 3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + z + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} + 5 = 0 \end{cases}$$

Insättning av punkten $(1,1)$ ger $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -1$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2$. Det ger riktningsderivatan $(-1,-2) \cdot \frac{1}{5}(4,3) = -2$.

10. Funktionen är ett polynom som sammanfaller med sin Maclaurinutveckling. Eftersom termer av ordning 1 saknas gäller att $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ .Det betyder att origo är en kritisk punkt för alla värden på a . Man utläser även andraderivatornas värden i origo:
$A = f_{11}(0,0) = 8a$, $B = f_{12}(0,0) = a^2$, $C = f_{22}(0,0) = 2a$. $\Rightarrow AC - B^2 = a^2(16 - a^2)$.
Detta kan naturligtvis även fås genom derivering på vanligt sätt. Vi ser nu att $AC - B^2 > 0$ om $-4 < a < 4$. Eftersom $A > 0$ för $0 < a < 4$ ger detta ett lokalt min. Eftersom $A < 0$ för $-4 < a < 0$ ger detta ett lokalt max. Om $a < -4$ eller $a > 4$ fås inget extremvärde (sadelpunkt) . För $a = 0$ och $a = \pm 4$ gäller att $AC - B^2 = 0$. Då ger ovan använda test ingen information. Vi studerar då hur f uppför sig nära origo:
$a = -4 \Rightarrow f(x,y) = (2x - y)^2(x - 4) \le 0 = f(0,0)$ i en omgivning av origo $\Rightarrow$ lokalt max.
$a = 0 \Rightarrow f(x,y) = (4x^2 + y^2)x$ dvs f växlar tecken i varje omgivning till origo $\Rightarrow$ sadelpkt.
$a = 4 \Rightarrow f(x,y) = (2x + y)^2(x + 4) \ge 0 = f(0,0)$ i en omgivning av origo $\Rightarrow$ lokalt min.