Lösningar till tentamen i kurs SF1609 (5B116, 5B1136) Matematik II 110823.

Linjär algebra

1. Vi löser systemet

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\3&4&5&6&7\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases}z=s\\w=t\end{cases}\Rightarrow y=4-2s-3t\Rightarrow x=1-(4-2s-3t)-s-t=-3+s+2t\ .$$

2. Låt P vara punkten $(3,\text{-}5,1)$ och Q punkten $(1,3,1)$. Det ger att $(\text{-}2,8,0)$ är vektorn från P till Q. En normalvektor till det sökta planet ges då av kryss-produkten mellan denna vektor och den ena av de två linjernas riktningsvektorer.

T ex fås $(-2,8,0)\times(2,-2,4)=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\-2&8&0\\2&-2&4\end{vmatrix}=(32,8,-12)$. Vi väljer $(8,2,\text{-}3)$ och

får planets ekvation på formen $8x+2y-3z=C$. Konstanten C bestäms genom insättning av en punkt på planet t ex $(1,3,1)$: C = 8+6-3 = 11 .

3. Vi söker matrisens egenvärden:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&2\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\0&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)^2=0\Rightarrow\lambda=1,2,2\ .$$

Egenvektorerna för det dubbla egenvärdet söks:

$$\begin{bmatrix}-1&1&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\bar{p}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}t\,.$$

Det ger direkt att matrisen inte är diagonaliserbar. Vi kan inte välja tre linjärt oberoende egenvektorer eftersom det enkla egenvärdet måste ha ett egenrum av dimension ett:

$$\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\bar{p}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}t\ .$$

4. Planets normalvektor $(2,1,\text{-}1)$ är riktningsvektor för normallinjen L genom P och Q. Normallinjens vektorekv är då $(x,y,z)=(3,1,-1)+t(2,1,-1)$, $-\infty<t<+\infty$. Att L skär planet i Q ger då $2(3+2t)+1+t+1+t=6\Rightarrow t=-\dfrac{1}{3}$. Insättning i linjens vektorekv ger

$(x,y,z) = (\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ som alltså är koordinaterna för Q. Det sökta avståndet ges då av längden av vektorn mellan P och Q dvs av $\left\| (3,1,-1) - (\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \right\| = \left\| (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \right\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ *le* .

5. Låt de tre vektorerna vara $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. De är linjärt oberoende om och endast om $A\bar{u} + B\bar{v} + C\bar{w} = \bar{0} \Rightarrow A = B = C = 0$. Detta system löses och vi söker de värden på a som ger entydig lösning:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6-a & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
. Systemet har entydig lösning om och endast om $2 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$.

Flervariabelanalys

6. Vi uppfattar ytan som nivåytan $F = 10$ till funktionen $F(x,y,z) = z + xy^2z^3$. En normalvektor till ytan ges då av $\nabla F = (y^2z^3, 2xyz^3, 1 + 3xy^2z^2)$. I punkten (1,-1,2) fås då normalvektorn (8,-16,13) . Det ger tangentplanets ekvation : $8x - 16y + 13z = C$ där konstanten C bestäms genom insättning av punkten (1,-1,2). Man får $C = 50$.

7. I punkten (1,0) fås $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-5y}{(x+y)^2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5x}{(x+y)^2} = 5 \Rightarrow \nabla f(1,0) = (0,5)$.

   Riktningsderivatan i den givna riktningen ges då av $\nabla f(1,0) \cdot \frac{(4,3)}{5} = 3$. Eftersom riktningsderivatans största värde i punkten (1,0) är $\left\| \nabla f(1,0) \right\| = 5$ finns ingen riktning i vilken den har värdet 6 .

8. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Vi studerar först det inre:

$$\begin{cases} f_1 = 2x - y = 0 \\ f_2 = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$ som inte är en inre punkt. Vi studerar sedan randen :

Cirkelbågen $x^2 + y^2 = 4$ i första kvadranten :

$f(x, \sqrt{4-x^2}) = 4 - x\sqrt{4-x^2}$ med derivatan

$-\sqrt{4-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$. I denna punkt antar f värdet 2 .

Linjestycket på $y-$axeln : $f(0,y) = y^2$ med derivatan $2y = 0$ vilket ger origo där $f = 0$.

Linjestycket $y = x - 2$: $f(x, x-2) = x^2 - 2x + 4$ med derivatan $2x - 2 = 0$ ger punkten (1,-1) där f antar värdet 3 .

Hörnpunkter : $f(2,0) = 4,\ f(0,2) = 4,\ f(0,-2) = 4$. Slutsatsen blir att det största värdet är 4 och det minsta är 0 .

9. Vi använder kedjeregeln:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf(t) + xyf'(t)(-\frac{y}{x^2}) = yf(t) - \frac{y^2}{x}f'(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = yf'(t)(-\frac{y}{x^2}) + \frac{y^2}{x^2}f'(t) - \frac{y^2}{x}f''(t)(-\frac{y}{x^2}) = \frac{y^3}{x^3}f''(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(t) + yf'(t)(\frac{1}{x}) - \frac{2y}{x}f'(t) - \frac{y^2}{x}f''(t)(\frac{1}{x}) = f(t) - \frac{y}{x}f'(t) - \frac{y^2}{x^2}f''(t)\ .$$

Insättning av detta i differentialekvationen ger det önskade resultatet.

10. Låt $F(x,y,z) = 2xyz - z^3$. Detta ger

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2xy - 3z^2 = \begin{cases} 0 & ,(x,y,z) = (2,3,2) \\ -28 & ,(x,y,z) = (5,2,4) \end{cases}$$ Alltså är, enligt implicita funktionssatsen, ytan grafen av en kontinuerligt deriverbar funktion i en omgivning av punkten (5,2,4) .

Detta innebär att $F(x,y,z(x,y)) = 0$. Derivering map x och y ger

$\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. I punkten (5,2,4) gäller då att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2yz}{2xy - 3z^2} = -\frac{16}{-28} = \frac{4}{7}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xz}{2xy - 3z^2} = -\frac{40}{-28} = \frac{10}{7}\ .$$

I punkten (2,3,2) hade vi $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$ medan t ex $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2yz = 12 \neq 0$. Det följer att ytan inte kan skrivas på formen $z = z(x,y)$ (med z kontinuerligt deriverbar) i en omgivning av punkten (2,3,2) eftersom ovanstående implicitderivering med avseende på x skulle ge motsägelsen 12+0 = 0 .