Lösningar till tentamen i kurs SF1609 (5B116, 5B1136) Matematik II 120128.

Linjär algebra

1. Vi Gausseliminerar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix}$$

Vi ser nu att om $a = -4$ saknas lösningar eftersom sista raden är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.
Om $a = 4$ har systemet oändligt många lösningar eftersom sista raden då endast består av nollor och z är en fri variabel.
Om $a \neq \pm 4$ har systemet en lösning eftersom var och en av de tre första kolumnerna har ett ledande element.

2. Vi beräknar determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Detta visar att vektorerna duger som bas. Låt koordinatvektorn ges av (a,b,c). Då gäller att $a(1,1,2)+b(2,1,3)+c(1,2,0)=(2,-1,4)$. Detta ger systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ Ur detta fås

koordinatvektorn $(a,b,c) = (-1,2,-1)$.

3. Vi söker matrisens egenvärden:

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1,1,2$$. Egenvektorerna fås:

$$\lambda=-1:\begin{bmatrix}-3&1&1&0\\0&0&0&0\\0&-2&-2&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3&-1&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}t\ ,\ t\neq 0.$$

$$\lambda=1:\begin{bmatrix}-1&1&1&0\\0&2&0&0\\0&-2&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\bar{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}t\ ,\ t\neq 0.$$

$$\lambda=2:\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&3&0&0\\0&-2&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&2&-1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow\bar{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}t\ ,\ t\neq 0.$$

Eftersom de tre egenvärdena är olika så är matrisen diagonaliserbar.

4. Kalla punkterna A , B resp C och bilda vektorerna mellan A och B resp mellan A och $C:\bar{u}=(3,-1,1)$ och $\bar{v}=(2,0,2)$. En normalvektor till planet ges då av

$$\bar{n}=\bar{u}\times\bar{v}=(3,-1,1)\times(2,0,2)=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\3&-1&1\\2&0&2\end{vmatrix}=(-2,-4,2)\ .\ \text{Vi väljer}\ \ \bar{n}=(1,2,-1)\ .$$

Planets ekvation är då $x+2y-z=D$. Insättning av tex punkten A ger $D=4$ dvs planets ekv är $x+2y-z=4$. Linjens riktningsvektor $(3,1,b)$ är ortogonal mot $\bar{n}$. Det ger $(1,2,-1)\cdot(3,1,b)=0\Rightarrow b=5$. Punkten $(a$, 1,-1) på linjen ligger i planet. Det ger $a+2+1=4\Rightarrow a=1$.

5. På matrisform kan ekvationen skrivas $\bar{x}^T A\bar{x}+K\bar{x}+8=0$ där $\begin{bmatrix}7&-24\\-24&-7\end{bmatrix}$ och $K=\begin{bmatrix}50&100\end{bmatrix}$. Vi vill diagonalisera A ortogonalt och söker egenvärden och egenvektorer. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A . Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix}\lambda-7&24\\24&\lambda+7\end{vmatrix}=\lambda^2-625=0\Rightarrow\lambda=\pm 25\ .$$ Normerade egenvektore söks:

$$\lambda=25:\begin{bmatrix}18&24&0\\24&32&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\bar{p}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$$

$$\lambda=-25:\begin{bmatrix}-32&24&0\\24&-18&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\bar{p}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

Vi väljer $P=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&3\\-3&4\end{bmatrix}\Rightarrow\det P=+1$ och koordinattransformationen $\bar{x}=P\bar{x}'$ är en rotation. Insättning i matrisekvationen ovan ger

$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + K(P\bar{x}') + 8 = 0 \Rightarrow (\bar{x}')^T (P^T AP)\bar{x}' + KP\bar{x}' + 8 = 0$. Då $P^T AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$

och $KP = \begin{bmatrix} 50 & 100 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 110 \end{bmatrix}$ får vi med $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & 110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 8 = 0 \Rightarrow 25(x')^2 - 25(y')^2 - 20x' + 110y' + 8 = 0 .$$

Kvadratkomplettering ger $(x' - \frac{2}{5})^2 - (y' - \frac{11}{5})^2 + 5 = 0$. Med koordinatbytet

$\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{5} \\ y'' = y' - \frac{11}{5} \end{cases}$ som är en translation fås slutligen $\frac{(y'')^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{(x'')^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ dvs kurvan är en hyperbel.

Flervariabelanalys

6. Vi provar att gå in mot origo längs x – axeln:

$y = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Vi går in längs linjen $y = x$:

$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$. Eftersom dessa två vägar in mot origo ger olika resultat existerar inte gränsvärdet.

7. Riktningsderivatan ges av $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$ där $\|\bar{u}\| = 1$. Denna är störst då $\bar{u} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

$\nabla f = (\frac{1}{1 + (x+y)^2} + ye^{xy}, \frac{1}{1 + (x+y)^2} + xe^{xy}) \Rightarrow \nabla f(1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Det ger $\bar{u} = \frac{(1,3)}{\sqrt{10}}$.

8. Eftersom funktionen är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt i det inre av området eller i en randpunkt eftersom singulära punkter saknas.

$\begin{cases} f_1 = 6x^2 - y^2 = 0 \\ f_2 = -2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$. Enda intressanta punkten i det inre är alltså origo.

Randen: $y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow h(x) = 2x^3 - x(9 - x^2) = 3x^3 - 9x$, $-3 \le x \le 3$. Vi söker kritiska punkter: $h'(x) = 9x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Detta svarar mot punkterna $(1, \pm\sqrt{8})$, $(-1, \pm\sqrt{8})$. Intressanta är också ändpunkterna i definitionsområdet till h.
Funktionsvärdena i ovan nämnda punkter är 0 , -6 , 6 , -54 , 54 .
Det största värdet är alltså 54 och det minsta -54.

9. Kedjeregeln ger $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}) = f''(u)(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(u)(2x + y)^2 + 2f'(u)$

$(x, y) = (1,1) \Rightarrow u = 3 \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 = 20.$

10a) $F(1,-1) = 0.$ $\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y + 2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1,-1) = 1 \neq 0$. Detta visar påståendet enligt implicita funktionssatsen.

b) $P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$. För att bestämma derivatorna deriverar vi två gånger implicit map x :

$$\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = 2x + y - 1 + (x + 2y + 2)f'(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x, f(x)) = 2 + f'(x) + (1 + 2f'(x))f'(x) + (x + 2y + 2)f''(x) = 0$$

Insättning av punkten (1,-1) ger $f'(1) = 0$ och $f''(1) = -2$ dvs $P_2(x) = -1 - (x-1)^2$.

c) Eftersom $f'(1) = 0$ är $x = 1$ en kritisk punkt. $f''(1) = -2 < 0$ ger att f har ett lokalt maximum i punkten.