Lösningar till tentamen i kurs SF1609 (5B116, 5B1136) Matematik II 120816.

Linjär algebra

1. Vi undersöker om A har invers:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 55 & -18 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 49 & -16 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Vi får $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49 & -16 & -19 \\ 3 & -1 & -1 \\ -18 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 5 & 6 \\ 43 & -14 & -17 \end{bmatrix}$

2. $\det C^T = \det C = \det A^{-1} \det B^2 = \dfrac{1}{\det A} \cdot (\det B)^2 \Rightarrow \det A = \dfrac{(\det B)^2}{\det C} = 9.$

3. Låt A vara T:s standardmatris. Dess kolumner är $T(1,0)$ och $T(0,1)$. $T(1,0) = 2(1,0)$ och $T(1,1) = 17(1,1)$. Den första kolumnen är alltså $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Den andra fås: $T(1,1) = T(1,0) + T(0,1) \Rightarrow T(01) = T(1,1) - T(1,0) = 17(1,1) - 2(1,0) = (15,17)$. Det ger $A = \begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$. Matrisen $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ med egenvektorerna som kolumner diagonaliserar A. Resultatet är den diagonalmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$.

4. Vi söker skärningslinjens ekv:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & -4 & 9 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{4} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = (1,-2,0) + t(1,9,4).$$

Låt $P(1,1,1)$ och $Q(1,\text{-}2,0)$. Bilda nu vektorn från Q till P : $(0,3,1)$. En normalvektor till planet fås om vi bildar kryssprodukten mellan denna vektor och en riktningsvektor till linjen

t ex $(1,9,4)$: $(0,3,1)\times(1,9,4)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 9 & 4\end{vmatrix}=(3,1,-3)$. Det sökta planets ekvation ges då av

$3x+y-3z=C$. Insättning av t ex punkten Q ger $C=1$.

5. Det räcker att visa att de båda vektorerna är linjärt oberoende. Låt $a\bar{u}+bT(\bar{u})=\bar{0}$.
   Vi skall visa att $a=b=0$. Operera med T: $aT(\bar{u})+bT^2(\bar{u})=T(\bar{0})=\bar{0}$. Eftersom $T^2(\bar{u})=\bar{0}$ och $T(\bar{u})\neq\bar{0}$ ger detta $a=0$. Insättning i den första ekvationen ovan ger $bT(\bar{u})=\bar{0}\Rightarrow b=0$ och beviset är klart.

Flervariabelanalys

6. Vi uppfattar ytan som nivåytan $F=0$ till ytan $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9$.
   En normalvektor till ytan ges av $\nabla F=(4x,6y,2z)$. I punkten $(1,\text{-}1,2)$ gäller att $\nabla F=(4,-6,4)$. Vi kan välja $\bar{n}=(2,-3,2)$ som det sökta planets normalvektor och får $2x-3y+2z=C$. Insättning av punkten ger tangentplanets ekvation:
   $2x-3y+2z=9$.

7. Låt $\bar{v}=(-2,2,1)$. Riktningsderivatan av T i riktningen $\bar{v}$ ges av
   $T'_{\bar{v}}=\nabla T\cdot\hat{v}$ där $\hat{v}=\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}=\dfrac{(-2,2,1)}{3}$. Vi beräknar gradientvektorn:
   $\nabla T=(2x,2z,2y-1)$ som i punkten är $(2,4,1)$. Detta ger riktningsderivatan
   i punkten : $\dfrac{5}{3}$ grader Celsius per längdenhet ur vilket vi får temperaturökningen
   5 grader Celsius per sekund efter multiplikation med myggans flyghastighet.
   För att bli varm så fort som möjligt skall myggan flyga i den riktning som ges av gradientvektorn i punkten dvs $(2,4,1)$.

8. Vi använder kedjeregeln.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g + x\frac{\partial g}{\partial x} = g + x\frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = g + x\frac{dg}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(g + x\frac{dg}{dt}) = \frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} + x\frac{d^2 g}{dt^2}\frac{\partial t}{\partial y} =$$

$$= 2\frac{dg}{dt} + 2x\frac{d^2 g}{dt^2} . \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{dg}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = 2x\frac{dg}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x\frac{dg}{dt}) = 2x\frac{d^2 g}{dt^2}\frac{\partial t}{\partial y} = 4x\frac{d^2 g}{dt^2}$$

Detta ger att den givna ekvationens vänsterled blir

$2\frac{dg}{dt} + x\frac{d^2 g}{dt^2} - (2\frac{dg}{dt} + 2x\frac{d^2 g}{dt^2}) + x\frac{d^2 g}{dt^2} = 0$ och beviset är klart.

9. Taylorpolynomet av grad 2 ges av

$$p_2(x,y) = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + f''_{yy}(y-1)^2\right].$$

Vi beräknar alla derivator:

$f'_x = y - 1 + 2\sin(x-y)$, $f''_{xx} = 2\cos(x-y)$, $f''_{xy} = 1 - 2\cos(x-y)$,

$f'_y = x - 1 - 2\sin(x-y)$, $f''_{yy} = 2\cos(x-y)$.

Detta ger $p_2(x,y) = -3 + \frac{1}{2!}\left[2(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2\right]$.

Vi ser att $(1,1)$ är en stationär punkt eftersom termer av grad 1 saknas.

Den kvadratiska formen kvadratkompletteras. Vi låter $\begin{cases} h = x-1 \\ k = y-1 \end{cases}$ och får

$2(h^2 - hk + k^2) = 2\left[(h-\frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{4} + k^2\right] = 2\left[(h-\frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2\right] \geq 0$ med likhet endast för $h = k = 0$. Detta innebär att den kvadratiska formen är positivt definit dvs punkten $(1,1)$ är en sträng lokal minimipunkt.

10. Vi observerar att funktionens största möjliga definitionsområde är ellipsskivan $4x^2 + y^2 \leq 4$. Vi skall undersöka inre punkter och randpunkter.

Inre punkter: $\begin{cases} f_1 = y - \dfrac{4x}{\sqrt{4-(4x^2+y^2)}} = 0 \quad (1) \\ f_2 = x - \dfrac{y}{\sqrt{4-(4x^2+y^2)}} = 0 \quad (2) \end{cases}$ $y \cdot (1) - 4x \cdot (2) \Rightarrow y^2 - 4x^2 = 0$. Vi får

$y = \pm 2x$. Detta insatt i (1) ger $2x(\pm 1 - \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}) = 0$ där endast + tecknet är möjligt.

Vi får $x=0$ och $\sqrt{1-2x^2}=1 \Rightarrow x=0$. Det ger att origo är den enda kritiska punkten.

Randpunkter: På randen gäller $f(x,y)=xy$ och $y=\pm 2\sqrt{1-x^2}$. Ur detta fås $g(x)=f(x,\pm 2\sqrt{1-x^2})=\pm 2x\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$. Vi undersöker nu denna funktions största och minsta värde: $g'(x)=\pm 2(\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}})=\pm 2\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Det ger de kritiska punkterna $(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$,$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2})$,$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$,$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2})$.

Ändpunkterna i definitionsområdet till g är x = -1 och x = 1 . Det ger punkterna (-1,0) och (1,0) . Beräkning av funktionsvärdena i alla intressanta punkter ger värdena f = -1 , 0 , 1 och 2 . Det minsta värdet är alltså -1 och det största är 2 .