KTH Matematik

Tentamen i kursen SF1609 (5B1116, 5B1136) Matematik II .
Torsdagen den 16 augusti 2012 kl 1400-1900.

För godkänt betyg (E) krävs minst 15 poäng.
De som uppnår 13 eller 14 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen.
För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 19, 23, 27 resp 31 poäng.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Linjär algebra

1. Lös matrisekvationen $XA = B$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$ (3p)

2. För de kvadratiska matriserna A , B och C gäller att $C^T = A^{-1}B^2$. Beräkna $detA$ då man vet att $detB = 3$ och $detC = 1$. (3p)

3. För den linjära avbildningen T från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ gäller att $(1,0)$ och $(1,1)$ är egenvektorer svarande mot egenvärdena 2 respektive 17. Bestäm standardmatrisen för T och ange en matris som diagonaliserar denna. Ange också motsvarande diagonala matris. (3p)

4. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(1,1,1)$ och innehåller skärningslinjen mellan planen $x + 3y - 7z + 5 = 0$ och $x - y + 2z - 3 = 0$. (4p)

5. Låt T vara en linjär avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ och $\overline{u}$ en vektor som uppfyller $T(\overline{u}) \neq \overline{0}$ och $T^2(\overline{u}) = \overline{0}$. Visa att vektorerna $\overline{u}$ och $T(\overline{u})$ duger som bas i $\mathbf{R}^2$. (4p)

Flervariabelanalys

6. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten (1,-1,2) till ellipsoiden $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 9 = 0$. (3p)

7. Temperaturen i ett område ges av $T(x, y, z) = x^2 + 2yz - z$ grader Celsius. En frusen mygga befinner sig i punkten (1,1,2) . Hur snabbt, uttryckt i grader Celsius per sekund, ökar temperaturen om myggan flyger med hastigheten 3 längdenheter per sekund i den riktning som ges av vektorn (-2,2,1) ? I vilken riktning skall myggan flyga för att bli varm så fort som möjligt? (3p)

8. Låt $z = f(x, y) = xg(t)$ där $t = x + 2y$ och g är en två gånger deriverbar funktion. Visa att $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. (4p)

9. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x, y) = xy - x - y - 2\cos(x - y)$ kring punkten (1,1) . Använd sedan detta för att avgöra om funktionen har ett lokalt extremvärde i denna punkt. (4p)

10. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = xy + \sqrt{4 - (4x^2 + y^2)}$ i dess största möjliga definitionsområde. (4p)