Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2005-01-15, kl. 14.00-19.00

5B1117 Matematik III för E och ME

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. Miniräknare är ej tillåten.
För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs 11, 17 respektive 23 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering. Bristfälliga motiveringar medför poängavdrag. Uppgiftsformuleringarna behöver inte lämnas in. Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

1. Beräkna integralen
$$\iiint_K (2x^2 + 2y + 2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
där kroppen K definieras av olikheterna
$$K: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$
(3p)

2. Beräkna den generaliserade trippelintegralen
$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{(1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$
(3p)

3. Beräkna integralen
$$\int_L (\frac{2x}{x^2 + y} + 1)\,\mathrm{d}x + (\frac{1}{x^2 + y} + 1)\,\mathrm{d}y,$$
där L är kurvan i xy-planet från punkten $(-1, 0)$ till $(1, 0)$ längs halvcirkeln $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. (3p)

4. Bestäm konvergensmängden för potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3(n + 1)^2 2^n x^{2n}$. (3p)

5. För en cirkel i planet gäller att radien R, omkretsen P och arean A är relaterade genom
$$P = 2\pi R, \quad A = \pi R^2,$$

där $\pi = 3.14\ldots$ är samma tal i båda ekvationerna.

Vi undersöker om motsvarande gäller på en sfärisk yta. Låt denna vara:

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

och betrakta kalotten K på S given av

$$K : z \geq a,$$

där $0 < a < 1$. Vi betraktar K som en sfärisk cirkelskiva med medelpunkten $(0, 0, 1)$. Bestäm

a) $R =$ avståndet längs S från ∂K till $(0, 0, 1)$. (1p)

b) $P =$ längden av ∂K. (1p)

c) $A =$ arean av K. (1p)

d) Jämför talen $\frac{P}{2R}$ och $\frac{A}{R^2}$: beror de på a och är de lika? (1p)

(Anm. Räkningarna underlättas något om man sätter $a = \cos v$, $0 < v < \pi/2$, och arbetar med v istället för a.)

6. Låt $\boldsymbol{B}$ vara vektorfältet

$$\boldsymbol{B} = (-x, 0, 2x + z)$$

a) Visa att $\boldsymbol{B}$ har en vektorpotential $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$) på formen $\boldsymbol{A} = (0, A_y, 0)$. (2p)

b) Visa att flödet $\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma$ av $\boldsymbol{B}$ genom en orienterad yta S bara beror på ytans rand ∂S. Beräkna $\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}\sigma$ i fallet

$$S : z = 1 + (x^2 + y^2 - 1)^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

med orientering given av att $n_z > 0$. (2p)

7. Bestäm konstanterna a, b, c så att

$$\begin{cases} x = u^2 + av^2 \\ y = 2uv \\ z = bu + cv + w \end{cases}$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w). Bestäm de kroklinjiga komponenterna A_u, A_v, A_w av vektorfältet $\boldsymbol{A} = (x, y, 3z)$. (4p)

8. Beräkna $\displaystyle\iint_S \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \, \mathrm{d}\sigma$, där $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ är en av basvektorerna för sfäriska koordinater, och S är den del av enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ för vilken $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$. (4p)

LYCKA TILL!