KTH-Matematik

Lösningsförslag till
Tentamenskrivning 2005-06-02, kl. 08.00-13.00
5B1117, matematik III för E och ME (6p)

Del A, 3-poängsuppgifter

1. $\int_0^1 \left[\int_0^x (xy + y^2)\,dy \right] dx = \int_0^\pi \left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx =$

$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 5\frac{x^3}{6} = \left[5\frac{x^4}{24} \right]_0^1 = \frac{5}{24}$

2. Man har att punkterna i kroppen satisfierar $x^2 \le z \le 1 - y^2$ och därmed också $x^2 + y^2 \le 1$. Volymen blir

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \left((1-y^2) - x^2\right) dxdy = \left\{ \begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}, dxdy = rdrdv \right\} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \left(1 - r^2\right) rdr = \frac{\pi}{2}$$

.

3. Om vi låter $P = \dfrac{2x}{x^2+y} + 1$ och $Q = \dfrac{1}{x^2+y} + 1$ så får vi att

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2}$ och $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2}$. Alltså är differentialen $Pdx + Qdy$ exakt i hela $\mathbf{R}^2$ utom i origo, ty där är derivatorna singulära. En ekvivalent utsaga är att fältet (P,Q) är konservativt i hela $\mathbf{R}^2$ utom i origo .Eftersom den givna kurvan inte omsluter origo kan vi utnyttja att det enligt satsen (10.3) om konservativa fält existerar en potential $U(x,y)$ till fältet (P,Q) så att $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ och

$Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$. Vi har alltså att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P = \dfrac{2x}{x^2+y} + 1 & (1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q = \dfrac{1}{x^2+y} + 1 & (2) \end{cases}$$

Integration av (1) med avseende på x ger

$$U = \int \left(\frac{2x}{x^2+y} + 1 \right) dx = \ln\left(x^2+y\right) + x + \Psi(y) \quad (3)$$

där Ψ är någon kontinuerlig och deriverbar funktion av y.

Derivation av (3) med avseende på y samt jämförelse med (2) ger

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y} + \Psi'(y) = \lceil (2) \rceil = \frac{1}{x^2+y} + 1 \Rightarrow \Psi' = 1 \Rightarrow \Psi = y + C$$

Potentialen till (P,Q) är alltså $U = \ln(x^2+y) + x + y + C$ och den sökta integralen kan nu beräknas enligt

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{2x}{x^2+y} + 1 \right) dx + \left(\frac{1}{x^2+y} + 1 \right) dy = U(1,0) - U(-1,0) =$$

$$= \ln 1 + 1 + 0 - \ln 1 + 1 + 0 = 2$$

4. Observera att S ej är en sluten yta och att vi endast kan tillämpa Gauss sats för Slutna ytor. Först slutar vi ytan S med $S_1 = \left\{ (x,y,z) : x^2 + (y-1)^2 \le 1, z = 0 \right\}$. Då omsluter S och S_1 volymen $V = \left\{ (x,y,z) : x^2 + (y-1)^2 + z^2 \le 1, z \ge 0 \right\}$ är ett halvklot.

   Nu använder vi Gauss sats

$$\oiint_{s+s_1} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \iiint_V div(\mathbf{F}) dV$$

   Eftersom den utriktade normale på S_1 är $-\mathbf{e}_z$ har vi att

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_z \, d\sigma + \iiint_V div\mathbf{F} \, dV$$

   Det följer att $\mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_z = z$ och då $z = 0$ på S_1 är den första integralen i högra ledet noll. Så $\iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \iiint_V div\mathbf{F} \, dV = \iiint_V dV =$ Volymen av

   Svar: flödet är $2\pi / 3$.

5. För att få ut arbetet behöver vi beräkna integralen $\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet \mathbf{dr}$.

   Vi börjar med att bestämma skärningskurvan γ. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ är en sfär med radien R och centrum i origo, medan $x = z$ är ett plan med enhetsnormalvektorn

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

   Skärning mellan de båda ytorna blir en cirkel med radien a. Den motsvarande cirkelskivan har också enhetsnormalvektorn $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$. Med det val som vi har gjort av $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$, så gäller Stokes sats om partikeln rör sig längs cirkeln.

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet \mathbf{dr} = \iint_S rot(\mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

Men $rot(\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{n}} = (\nabla\times\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{n}} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\pi y}{a}+\sin\left(\dfrac{\pi z}{a}\right) & \dfrac{x}{a} & \dfrac{\pi x}{a}\cos\left(\dfrac{\pi z}{a}\right) \end{vmatrix} =$

$$= 0 + 0 + \frac{F_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a} - \frac{\pi}{a}\right)$$

Stokes sats ger $\oint_\gamma \mathbf{F}\bullet\mathbf{dr} = \iint_S rot(\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \frac{F_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}-\frac{\pi}{a}\right)\iint_S d\sigma =$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}-\frac{\pi}{a}\right)\pi a^2 = \frac{\pi(1-\pi)a}{\sqrt{2}}F_0$$

Svar: $\dfrac{\pi(1-\pi)a}{\sqrt{2}}F_0$

6. .

Skalfaktorerna: $\begin{cases} h_u = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right| = |(2v,2u,0)| = 2\sqrt{u^2+v^2} \\ h_v = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| = |(2u,-2v,0)| = 2\sqrt{u^2+v^2} \\ h_w = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}\right| = |(0,0,1)| = 1 \end{cases}$

Med $F_u = u\sqrt{u^2+v^2}, F_v = v\sqrt{u^2+v^2}$ ger (se formelbladet)

$$div(\mathbf{F}) = \frac{1}{4(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(2u(u^2+v^2)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(2v(u^2+v^2)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4(u^2+v^2)}\left[(6u^2+2v^2)+(2u^2+6v^2)\right] = 2$$

7. En variant av Gauss sats säger att $\iint_{\partial K} U\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \iiint_K gradU dxdydz$ (se sats 11.15 sid 364). Detta ger

$$\iint_{\partial K}(1+2x+3y+4z)\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \iiint_K (2,3,4)dxdydz = (2V,3V,4V)$$

Obs! vi kan definiera skalär produkten endast mellan två vektorer.

Svar $\oiint_{\partial K}(1+2x+3y+4z)\cdot\hat{n}d\sigma = (2,3,4)V$

Del B, 4-poängsuppgifter

8. Ytan $z = x^2$ är en parabolisk "ränna" och ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ är nedåt paraboloid med vertex i $(0,0,4)$. På skärningen mellan ytorna är

$$4 - x^2 - y^2 = x^2 \Leftrightarrow 4 = 2x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Här ser vi att projektion på xy-planet av kroppen K är ellipsskivan

$E : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \le 1$.

Kroppens massa är

$$m = \iiint_K \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_K |x|\,dxdydz = \iint_E \left(\int_{x^2}^{4-x^2-y^2} |x|\,dz \right) dxdy = \iint_E |x|\left(4 - x^2 - y^2 - x^2\right) =$$

$$= 2\iint_{E_1} x\left(4 - 2x^2 - y^2\right) = \left[E_1 : \text{halva ellipsskivan } x \ge 0\right] = \left\{ \begin{matrix} x = \sqrt{2}\cos v \\ y = \sqrt{2}\sin v \end{matrix}, dxdy = 2\sqrt{2}rdrdv \right\} =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r\sqrt{2}\cos v\left(4 - 4r^2\right)2\sqrt{2}rdrdv = 8\left[\sin v\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[4\frac{r^3}{3} - 4\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{128}{15}$$

Svar: Kroppens massa är $\frac{128}{15}$ me.

9. Här

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{1+n^2}$$

- Finn konvergensradie via tex kvotkriteriet

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{1+n^2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{1+(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \frac{3}{2}$$

Serien konvergerar absolut då $|x + 5/2| < 3/2 \Leftrightarrow -4 < x < -1$

- Undersök ändpunkterna

Fall $x = -4 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{1+n^2}(-4+5/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n^2}$. Denna serien är absolut konvergent. Ty

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n^2}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} \text{ som jämförs med } \int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^n = \frac{\pi}{2}$$

(Allt enligt Cauchys integral kriteriet sats 9.5 MAI)

Fall $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{1+n^2}(-1+5/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

Denna serien är konvergent. Ty

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ som jämförs med $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^n = \frac{\pi}{2}$ (Allt enligt Cauchys integral kriteriet sats 9.5 MAI) svar: Konvergensmängden=$\{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le -1\}$

10. Om vi låter $P = y^2 + y\cos xy$ och $Q = y + x\cos xy$ så får vi att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos xy - xy\sin xy$$

och

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + \cos xy - y\sin xy,$$

dvs

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \ne \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Alltså är fältet (P,Q) inte konvervativt. Om vi däremot betraktar fäletet $(P_2,Q) = (y\cos xy, y + x\cos xy)$ så får vi att

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = \cos xy - xy\sin xy = \frac{\partial Q}{dx}.$$

Alltså är fältet$(P_2,Q) = (y\cos xy, y + x\cos xy)$ konservativt. Linjeintegralen av ett konservativt fällt är oberoende av vägen. Vi kan alltså integrera fältet (P_2,Q) från (0,1) till (1,0) via y-axeln från 1 till 0 till origo och sedan till (1,0) via x-axeln. Vi får

$$\int_\Gamma (y\cos xy)dx + (y + x\cos xy)dy = \int_{\substack{y=1\\x=0}}^{0} (y\cos xy)dx + (y + x\cos xy)dy +$$

$$+\int_{\substack{x=0\\y=0}}^{1} (y\cos xy)dx + (y + x\cos xy)dy = \int_1^0 ydy = -\frac{1}{2}$$

Vidare har vi följande relation mellan fälten (P,Q) och(P_2,Q):

$$(P,Q) = (P_2,Q) + (y^2,0)$$

och den sökta integralen kan beräknas enligt

$$\int_\Gamma (y^2 + y\cos xy)dx + (y + x\cos xy)dy = \int_\Gamma (P,Q)\cdot(dx,dy) =$$

$$= \int_\Gamma \{(P_2,Q) + (y^2,0)\}\cdot(dx,dy) = \underbrace{\int_\Gamma (P_2,Q)\cdot(dx,dy)}_{=-1/2 \text{ enl. ovan}} + \int_\Gamma (y^2,0)\cdot(dx,dy) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \int_\Gamma (y^2,0)\cdot(dx,dy) = -\frac{1}{2} + \int_0^1 y^2 dx = \left[y^2 = 1 - x^2 \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} + \int_0^1 (1 - x^2)dx = -\frac{1}{2} + \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

SVAR: $\frac{1}{6}$.

---

11. **F** har en skalär potential om $rot(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Vi får

$$rot(\mathbf{F}) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (2\rho z + \rho^2\sin\varphi) & \rho(a\rho^2\cos\varphi) & (\rho^2 + z) \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left(3a\rho^2\cos\varphi - \rho^2\cos\varphi\right)\mathbf{e}_z$$

Så måste ha att $a = 1/3$ för att rotationen skall bli 0. Potentialen Φ ges av ekvationen

$$\nabla\Phi = \mathbf{F} \Leftrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z =$$
$$= \left(2\rho z + \rho^2\sin\varphi\right)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{3}\rho^2\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi + \left(\rho^2 + z\right)\mathbf{e}_\mathbf{z}$$

Som blir
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 2\rho z + \rho^2\sin\varphi & (1) \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{3}\rho^2\cos\varphi & (2) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = \rho^2 + z & (3) \end{cases}$$

Ekvation (1) ger $\Phi = \rho^2 z + \frac{1}{3}\rho^3\sin\varphi + f(\varphi, z)$ Ekvation (2) ger då

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \frac{1}{3}\rho^2\cos\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi} = \frac{1}{3}\rho^2\cos\varphi$ som ger att $f(\varphi, z) = g(z)$. Alltså

$\Phi = \rho^2 z + \frac{1}{3}\rho^3\sin\varphi + g(z)$. För att bestämma $g(z)$ använder vi (3):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \rho^2 + g'(z) = \rho^2 + z \Rightarrow g(z) = z^2/2 + C$$

Svar: $a = 1/3;$ potentialen till $\mathbf{F}$ är $\Phi(\rho,\varphi,z) = \rho^2 z + \frac{1}{3}\rho^3\sin\varphi + \frac{z^2}{2} + C$.

12. Vi beräknar

$$\mathbf{F} = \nabla\Phi =$$
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \left(2kx - \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, 2ky - \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, 2kz - \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$= \left[\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right] = 2k\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Vi skriver $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 2k\mathbf{r} + \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$.

Utanför origo är $div\mathbf{F}_2 = div(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}) = \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0$.

Låt $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 < R^2$ så att sfären ligger innanför S. Om S_2 har utåtriktad normal så är $S - S_2$ rand till området mellan S och S_2 och Gausssats ger att

$$\oiint_S \mathbf{F}_2 \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oiint_{S_2} \mathbf{F}_2 \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oiint_{S_2} \left(\frac{(x, y, z)}{a^3} \right) \bullet \left(\frac{(x, y, z)}{a} \right) d\sigma =$$

$$= \oiint_{S_2} \frac{a^2}{a^4} d\sigma = \frac{1}{a^2} \oiint_{S_2} d\sigma = \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi$$

Vi får då $\oiint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oiint_S (2k\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma - 4\pi$.

Vidare är

$$\oiint_S (2k\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = [\text{Gaus´sats}] = \iiint_V div(2k\mathbf{r}) dV =$$

$$= [div(\mathbf{r}) = 3] = 2k \cdot 3 \iiint_V dV = 2k \cdot 3 \cdot \pi R^2 L.$$

Vi får $\oiint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oiint_S (2k\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma - 4\pi = 6\pi k L R^2 - 4\pi$.

För att detta flöde skall vara noll krävs $6\pi k L R^2 - 4\pi = 0 \Rightarrow k = \dfrac{2}{3LR^2}$

Svar: $k = \dfrac{2}{3LR^2}$