KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2005-06-02, kl. 08.00-13.00
5B1117, matematik III för E och ME (6p)

- Om du redan är godkänd (dvs har minst 6 godkända lappskrivningar) så skall du endast räkna uppgifter från B-delen.
- Om du inte är godkänd får du räkna uppgifter från både A-delen och B-delen. För uppgifter från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar din bonuspoäng till 18p.

Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 18, 25 och 31 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningsförslaget skall textförkaras Bristande läsbarhet medför poängavdrag.

Hjälpmedel: Medföljande formelblad. För matematik III.

Del A, 3-poängsuppgifter

Den som blivit godkänd på lappskrivning X, $1 \leq X \leq 7$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Beräkna $\iint_D \left(xy + y^2\right) dxdy$ då $D = \left\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\right\}$.

2. Beräkna volymen av den begränsade kropp som skärs ut av cylinder ytorna $z = x^2$ och $z = 1 - y^2$.

3. Beräkna
$$\int_\Gamma \left(\frac{2x}{x^2 + y} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{x^2 + y} + 1\right) dy$$
tagen längs halvcirkeln Γ med ekvationen $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ från (-1,0) till (1,0).
4. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (1, 0, z)$ genom halvsfären $S = \left\{(x,y,z): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, z \geq 0\right\}$ i riktning: $\hat{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{e}_z \geq 0$.(Observera att S ej är en sluten yta).

5. En partikel påverkas av kraftfältet
$$\mathbf{F} = F_0 \left[\left(\frac{\pi y}{a} + \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right)\mathbf{e}_x + \frac{x}{a}\mathbf{e}_y + \frac{\pi x}{a}\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\mathbf{e}_z\right]$$
Vilket arbete uträttar fältet då partikeln rör sig i positiv riktning kring den cirkel som ges av skärningen mellan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ och $x = z$?

Var god vänd

6. Ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w) definieras genom

$$\begin{cases} x = 2uv \\ y = u^2 - v^2 \\ z = w \end{cases}$$

Beräkna divergensen av vektorfältet $\mathbf{F} = \sqrt{u^2 + v^2}\left(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v\right)$, där $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$ är den kroklinjiga ON-basen.

7. Låt K vara en kropp med volym V. Beräkna den vektorvärda integralen $\iint_{\partial K} (1 + 2x + 3y + 4z)\hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$ uttryckt i V.

Del B, 4-poängsuppgifter

8. Den begränsade kroppen K begränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 4 - x^2 - y^2$. Kroppen K : s densitet är $\rho(x, y, z) = |x|$ i någon lämplig enhet. Beräkna kroppen K : s massa.

9. Bestäm konvergensmängden till potensserien $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{1+n^2}\left(x + \frac{5}{2}\right)^n$.

10. Beräkna

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}, \text{ där } \mathbf{F} = \left(y^2 + y\cos xy\right)\mathbf{e}_x + \left(y + x\cos xy\right)\mathbf{e}_y$$

tagen längs cirkelbågen Γ med ekvationen $y = \sqrt{1 - x^2}$ från (0,1) till (1,0).

11. Bestäm ett tal a sådant att vektorfältet givet i cylinderkoordinater (ρ, φ, z)

$$\mathbf{F} = \left(2\rho z + \rho^2 \sin\varphi\right)\mathbf{e}_\rho + a\rho^2 \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \left(\rho^2 + z\right)\mathbf{e}_\mathbf{z}$$

har en skalär potential och ange denna.

12. En cylinder med höjd L och radien R har centrum i origo. Bestäm konstanten k i funktionen

$$\Phi(x, y, z) = k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$$

så att flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ ut ur den slutna yta S som bildas av mantelytan och de två cirkulära locken blir noll.