KTH-Matematik

Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2005-08-27, kl. 14.00-19.005B1117, matematik III för E och ME (6p)

1.Vi inför nya variabler enligt

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} . \quad (*)$$

Ur villkoren $1 \le x + y \le 2, 1 \le \dfrac{y}{x} \le 2$ får vi att

$$1 \le v \le 2, 1 \le u \le 2 .$$

Vi löser x och y ur (*)

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = vx \\ x = u - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = vx \\ x = u - vx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{vu}{1+v} \\ x = \dfrac{u}{1+v} \end{cases}$$

Funktionaldeterminanten blir

$$\det \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u+uv}{(1+v)^3} = \frac{u(1+v)}{(1+v)^3} = \frac{u}{\left(1+v\right)^2} .$$

Determinanten är positiv i **D**,och integralen kan alltså beräknas enligt

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{1}{x^2} \ln \frac{y}{x} dxdy = \int_1^2 \int_1^2 \frac{(1+v)^2}{u^2} \ln v \cdot \frac{u}{\left(1+v\right)^2} dudv = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{u} \ln v dudv =$$

$$= \left(\int_1^2 \frac{du}{u} \right) \left(\int_1^2 \ln v dv \right) = \ln 2 \cdot \int_1^2 \ln v dv = \ln 2 \left(\left[v \ln v \right]_1^2 - \int_1^2 dv \right) =$$

$$= \ln 2 \left(2 \ln 2 - 1 \right)$$

<u>SVAR</u>: (2ln 2 - 1)ln 2

2.Skärningskurvans projektion i xy-planet ges av

$$2x + 2y + x^2 + y^2 = 2 .$$

Här ger en kvadratkompletering att

$$2x + 2y + x^2 + y^2 = (x+1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 =$$
$$= (x+1)^2 + (y+1)^2 - 2$$

och kombinerat med ekvationen för skärningskurvan ovan får vi alltså

$$2x + 2y + x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

dvs en cirkel med radien 2 och centrum i (-1,-1).

Om vi låter $f(x,y)=2-2x-2y$ så beskrivs det givna planet av $z=f(x,y)$. Arean fås då ur dubbelintegralen

$$A=\iint_{\mathbf{D}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy$$

där **D** är ytans projektion i *xy*-planet. Så även boken sidan 227 till 230.
I vårt fall ges alltså **D** av $\left\{(x,y):(x+1)^2+(y+1)^2\leq 4\right\}$ och arean blir

$$A=\iint_{\mathbf{D}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy=\iint_{\mathbf{D}}\sqrt{2^2+2^2+1}\,dxdy=3\iint_{\mathbf{D}}dxdy=$$

$$=3\cdot\left(\text{Arean av }\mathbf{D}\right)=3\cdot\pi\cdot 2^2=12\pi$$

<u>**SVAR**:</u> 12π

3.Om vi låter $P=x^2+y$ och $Q=y^2+x$ så får vi att

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$ och $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$. Alltså är fältet (P,Q) är konservativt i hela $\mathbf{R}^2$. Vi kan utnyttja att det enligt satsen (10.3) om konservativa fält existerar en potential $U(x,y)$ till fältet (P,Q) så att

$P=\dfrac{\partial U}{\partial x}$ och

$Q=\dfrac{\partial U}{\partial y}$. Vi har alltså att

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=P=x^2+y & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q=y^2+x & (2)\end{cases}$$

Integration av (1) med avseende på x ger

$$U=\int\left(x^2+y\right)dx=\frac{x^3}{3}+yx+\Psi(y)\quad(3)$$

där Ψ är någon kontinuerlig och deriverbar funktion av y.
Derivation av (3) med avseende på y samt jämförelse med (2) ger

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x+\Psi'(y)=\left[(2)\right]=x+y^2\Rightarrow\Psi'=y^2\Rightarrow\Psi=\frac{y^3}{3}+C$$

Potentialen till (P,Q) är alltså $U(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+xy+\dfrac{y^3}{3}+C$ och den sökta integralen kan nu beräknas enligt

$$\int_{\Gamma}\left(x^2+y\right)dx+\left(y^2+x\right)dy=U(-3,3)-U(1,-1)=$$

$$=\frac{-27}{3}-9+\frac{27}{3}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}=-8$$

<u>**SVAR**:</u> -8

---

4. Kroppen V har en sluten ytan S och vektor fältet **F** är kontinuerligt deriverbar på S och V
Då gäller Gauss sats

$$\oiint_S \bar{F} \bullet \hat{n} d\sigma = \iiint_V div(\bar{F})dv = \iiint_V 2dv = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_{z=0}^{z=(1-x^2-y^2)/2} dz \right) dydx$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1-x^2-y^2}{2} dxdy = [\text{polära koordinater}] = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \frac{(1-r^2)r}{2} dr \right) = \pi$$

Svar Vätskevolymen $\oiint_S \bar{F} \bullet \hat{n} d\sigma = \pi$

5.Projektionen γ på $xy-$planet av Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Låt D vara området innanför γ ,och Σ området innanför Γ. På Γ är $z = 1 + y^2$.
Då fås eftersom Γ är en sluten kurva.

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_\Gamma (y^2ze^x + x^2y)dx + (2yze^x + yz)dy + y^2e^xdz = \oint_\Gamma (y^2ze^x + x^2y, 2yze^x + yz, y^2e^x)\cdot \mathbf{dr}$$

$$\oint_\Gamma (y^2ze^x, 2yze^x, y^2e^x)\cdot \mathbf{dr} + \oint_\Gamma x^2ydx + yzdy = \oint_\Gamma grad(y^2ze^x) + \oint_\Gamma x^2ydx + yzdy = 0 + \oint_\Gamma x^2ydx + yzdy$$

$$= [z = 1 + y^2] = \oint_\Gamma x^2ydx + y(1+y^2)dy = [\text{Stokes sats}] = \iint_\Sigma rot(x^2y, y(1+y^2), 0)\cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (0,0,-x^2)\cdot(0,-2y,1)dxdy = -\iint_D x^2dxdy = [\text{polärakoord.}] - \int_0^1 r^3dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta =$$

$$= -\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -\pi/4$$

Svar $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot \mathbf{dr} = -\pi/4$

6.Vi får

$$\mathrm{rot}(u\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (uF_1, uF_2, uF_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ uF_1 & uF_2 & uF_3 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_x \left(\frac{\partial}{dy}(uF_3) - \frac{\partial}{dz}(uF_2) \right) - \hat{\mathbf{e}}_y \left(\frac{\partial}{dx}(uF_3) - \frac{\partial}{dz}(uF_1) \right) +$$

$$+\hat{\mathbf{e}}_z \left(\frac{\partial}{dx}(uF_2) - \frac{\partial}{dy}(uF_1) \right) = \hat{\mathbf{e}}_x \left(u'_yF_3 + u\frac{\partial F_3}{\partial y} - u'_zF_2 - u\frac{\partial F_2}{\partial z} \right) -$$

$$-\hat{\mathbf{e}}_y \left(u'_xF_3 + u\frac{\partial F_3}{\partial x} - u'_zF_1 - u\frac{\partial F_1}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{e}}_z \left(u'_xF_2 + u\frac{\partial F_2}{\partial x} - u'_yF_1 - u\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) =$$

$$= \hat{\mathbf{e}}_x \left(u'_yF_3 - u'_zF_2 + u\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \right) - \hat{\mathbf{e}}_y \left(u'_xF_3 - u'_zF_1 + u\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \right) +$$

$$+\hat{\mathbf{e}}_z\left(u'_xF_2-u'_yF_1+u\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z\\ u'_x & u'_y & u'_z\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}+u\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=(\text{grad } u)\times\mathbf{F}+u\text{rot}\mathbf{F}$$

Vilket skulle verifieras.

7.En variant av Gauss sats säger att $\iint_\Sigma U\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma=\iiint_K gradU dxdydz,$ där Σ är randytan till kroppen $K:9x^2+4y^2+z^2\le 36$ (se sats 11.15 sid 364). Detta ger

$$\iint_\Sigma(1+2x+3y+4z)\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma=\iiint_K(2,3,4)dxdydz=(2V,3V,4V)$$

där V är volymen till ellipsoiden $K=\frac{4\pi}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot 6=48\pi$

Svar $\oiint_\Sigma(1+2x+3y+4z)\hat{n}d\sigma=(2,3,4)V=(2,3,4)48\pi$

Del B, 4-poängsuppgifter

8. Vi har $-\Delta\Phi=\frac{2}{r^4}\Leftrightarrow-\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right]=\frac{2}{r^4}$

Med $\Phi=\Phi(r)$ fås

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\frac{2}{r^4}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=-\frac{2}{r^2}$$

Efter integrations fås

$$r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{2}{r}+C_1\Rightarrow\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{2}{r^3}+C_1\Rightarrow\Phi(r)=-\frac{1}{r^2}-\frac{C_1}{r}+C_2$$

Svar; $\Phi(r)=-\frac{1}{r^2}-\frac{C_1}{r}+C_2$, där C_1 och C_2 är konstanter

9. Vi har $\oint_\Gamma\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ med $\mathbf{F}=(y+2x,x^2+z,z^2+y)$ och $rot\mathbf{F}=(0,0,2x-1)$, fältet är kontinuerligt deriverbar på och innanför cylindern, så gäller Stokes sats

$$\oint_\Gamma\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=\iint_\Sigma rot(\mathbf{F})\bullet\hat{n}d\sigma=\left[\hat{n}=(0,0,1)\right]=\iint_{x^2+y^2\le 1}(2x-1)dxdy$$

$$=[\text{polära koord}]=\pm\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2r\cos\theta-1)rdr=\pm\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr=\pm\pi$$

Svar: $\left|\oint_\Gamma(y+2x)dx+(x^2+z)dy+(z^2+y)dz\right|=\pi$

10. vi har $\mathbf{r}(u,v,\varphi)=\left(uv\cos\varphi, uv\sin\varphi, \frac{u^2-v^2}{2}\right)$

a) kontrollera ortogonaliteten

$$\begin{cases}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=(v\cos\varphi, v\sin\varphi, u)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=(u\cos\varphi, u\sin\varphi, -v)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}=(-uv\sin\varphi, uv\cos\varphi, 0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\bullet\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\bullet\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\bullet\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}=0$$

Koordinatsystem är således ortogonalt.

b) skalfaktorer

$$h_i=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right|$$

$$h_1=h_2=\sqrt{u^2+v^2}$$

$$h_3=uv$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right]=$$

$$\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(uv\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(uv\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u^2+v^2}{uv}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{(u^2+v^2)}\left\{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u}\right)+\frac{1}{u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}+\left(\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\right\}+\frac{1}{u^2v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

$c)\,\mathbf{\Phi}=(u^2+v^2)\cos\varphi$

$$\nabla^2\mathbf{\Phi}=\Delta\mathbf{\Phi}=\left(\frac{8}{u^2+v^2}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v^2}\right)\cos\varphi$$

11.Vi har $\mathbf{F}\cdot(\nabla\times g\mathbf{F})=\mathbf{F}\cdot(\nabla g\times\mathbf{F})+\mathbf{F}\cdot(g\nabla\times\mathbf{F})=\nabla g\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{F})+g\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F}=g\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F}$.
Med $\mathbf{F}=\nabla f$ och $\nabla\times\nabla f=\mathbf{0}$. Detta ger att
$\mathbf{F}\cdot(\nabla\times g\mathbf{F})=\mathbf{0}$.

12.vektorfältet $\overline{F}$ är kontinuerligt deriverbar utanför origo och har

$$div(\overline{F})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{-2}\left(3\cos^2\theta+2r\cos\theta-1+r^2-r^5\right)\right]+\frac{1}{r^5\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta(\sin 2\theta+r\sin\theta)\right]=-3$$

.

Tillämpa nu Gauss sats på området V mellan Σ och halvsfären S: $r=\frac{3}{2}$

Då fås

$$\iint_{\Sigma-S} \bar{F} \bullet d\bar{\sigma} = \iiint_V div\left(\bar{F}\right)dv = -3 \cdot \frac{2\pi}{3}\left[\frac{3}{2}\frac{3}{2}\cdot 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^3\right] = -\frac{27\pi}{4}$$

enligt formeln för volymen av en ellipsoiden. Men

$$\iint_S \bar{F} \bullet d\bar{\sigma} = \iint_S \bar{F} \bullet \mathbf{e}_r d\sigma = \iint_S r^{-4}\left[(3\cos^2\theta + 2r\cos\theta - 1 + r^2 - r^5)\mathbf{e}_r + \left(\sin 2\theta + r\sin\theta\right)\mathbf{e}_\theta\right] \bullet \mathbf{e}_r d\sigma =$$

$$\iint_S r^{-4}\left[(3\cos^2\theta + 2r\cos\theta - 1 + r^2 - r^5)\right]d\sigma = \left[\text{sfäriska koord },d\sigma = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \text{på } S \text{ är } r = 3/2\right]$$

$$\left\{\text{Altern. } d\bar{\sigma} = \pm\left(r^2\sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r + r\sin\theta d\varphi dr \mathbf{e}_\theta + r dr d\theta \mathbf{e}_\varphi, \text{på } S \text{ är } r = 3/2 \Rightarrow dr = 0\right)\right\}$$

$$\iint_S \bar{F} \bullet d\bar{\sigma} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left[3\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 + \frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^5\right]\sin\theta d\theta = -\frac{41\pi}{12}$$

.

Varför den sökta integralen blir

$\iint_\Sigma \bar{F} \bullet d\bar{\sigma} = -\frac{41\pi}{12} - \frac{27\pi}{4} = -\frac{61\pi}{6}$ eller $\frac{61\pi}{6}$ beroende på vilken normalriktning till Σ, som räknas positiv.