KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2005-08-27, kl. 14.00-19.00
5B1117, matematik III för E och ME (6p)

- Om du redan är godkänd (dvs har minst 6 godkända lappskrivningar) så skall du endast räkna uppgifter från B-delen.

- Om du inte är godkänd får du räkna uppgifter från både A-delen och B-delen. För uppgifter från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar din bonuspoäng till 18p.

Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 18, 25 och 31 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningsförslaget skall textförklaras Bristande läsbarhet medför poängavdrag.

Hjälpmedel: Medföljande formelblad. För matematik III.

Del A, 3-poängsuppgifter

Den som blivit godkänd på lappskrivning X , $1\leq X \leq 7$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{1}{x^2}\ln\frac{y}{x}\,dxdy \text{ då } \mathbf{D} \text{ ges av } 1 \le x+y \le 2, 1 \le \frac{y}{x} \le 2$$

2. Beräkna arean av den del av planet $2x+2y+z=2$ som ligger innanför ytan $z=x^2+y^2$.

3 Beräkna

$$\int_\Gamma \left(x^2+y\right)dx+\left(y^2+x\right)dy$$

från punkten (1,-1) till (-3,3) längs kurvan $|x-y|+2x+y=3$.

4.Hastighetsvektorn i en vätskeströmning är $\mathbf{F}=\left(z,0,x^2+2z\right)$.
Beräkna den vätskevolym, som per tidsenhet strömmar ut från kroppen som begränsas av $xy-$planet och ytan $2z=1-x^2-y^2$.

5.Beräkna cirkulationsintegralen $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot \mathbf{dr}$, då Γ är skärningskurvan mellan ytorna $z=x^2+2y^2$ och $x^2+y^2=1$ och $\mathbf{F}=\left(y^2ze^x+x^2y,\ 2yze^x+yz,\ y^2e^x\right)$.
Kurvans projektion på $xy-$planet är positivt orienterad.

Var god vänd

6.Låt u och $\boldsymbol{F}$ vara differentierbara funktioner av typ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ respektive $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Verifiera att

$$\mathrm{rot}(u\mathbf{F}) = (\mathrm{grad}\ u) \times \mathbf{F} + u(\mathrm{rot}\mathbf{F})$$

7. Beräkna $\iint_\Sigma (1+2x+3y+4z)\hat{n}\,d\sigma$, där ytan $\Sigma : 9x^2+4y^2+z^2 = 36$

Del B, 4-poängsuppgifter

8. Ett gasmoln i rymden har, för $r>1$, tätheten $f(r) = \dfrac{2}{r^4}$ uttryckt i sfäriska koordinater (r,θ,φ). Gravitationspotentialen Φ som alstras av gasmolnet uppfyller Poissons ekvation $-\Delta\Phi = f$. Bestäm alla sfäriskt symmetriska lösningar, dvs alla lösningar på formen $\Phi = \Phi(r)$, till denna ekvation för $r>1$ $\left(\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = div(grad\Phi)\right)$

9. Låt Γ vara en enkel sluten kurva som löper runt cylinderytan $x^2+y^2=1$ ett varv. Visa att värdet av $\left|\oint_\Gamma (y+2x)dx + (x^2+z)dy + (z^2+y)dz\right|$ är oberoende av vilken sådan kurva som väljs och bestäm detta värde.

10. Genom sambandet

$$\begin{cases} x = uv\cos\varphi & u,v \in [0,\infty) \\ y = uv\sin\varphi & \varphi \in [0,2\pi) \\ z = \dfrac{u^2-v^2}{2} \end{cases}$$

definieras ett kroklinjigt koordinatsystem (paraboliska koordinater) i rymden . Uttryck Laplaces operator $\Delta = \nabla^2$ i dessa koordinater samt beräkna $\Delta\Phi$ där $\Phi(u,v,\varphi) = (u^2+v^2)\cos\varphi$

11.Låt f och g vara kontinuerligt deriverbara funktioner i rymden och sätt $\mathbf{F} = \nabla f$. Bestäm $\mathbf{F} \bullet \mathrm{rot}(g\mathbf{F})$.

12. Vektorfältet $\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = r^{-4}\left[(3\cos^2\theta + 2r\cos\theta - 1 + r^2 - r^5)\mathbf{e}_r + (\sin 2\theta + r\sin\theta)\mathbf{e}_\theta\right]$ är given i sfäriska koordinater.
Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ över ytan $\Sigma : 4x^2+4y^2+z^2 = 9, z>0$.