KTH-Matematik

Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2006-01-17, kl. 14.00-19.005B1117, matematik III för E och ME (6p)

1. Plattans totala massa är $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma$,där S är ytan av $z = 1 + xy,\ x^2 + y^2 \le 1$ med normal $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$. Vi har $d\sigma = |\mathbf{n}|dxdy = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\ dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\ dxdy$

alltså masssan $\iint_{x^2+y^2\le 1} \left(1+x^2+y^2\right)dxdy$. Polär substitution ger $\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \left(1+r^2\right)rdr\right]d\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Svar: $\frac{3\pi}{2}$.

2. Se kursboken sid 243 ex 9.19.
3. Se kursboken sid 276 ex 10.7
4. Se kursboken sid 301 ex 11.4

5. Γ är en cirkel i planet $x+z=1$; låt motsvarande cirkelskiva vara S.
Projektionen γ på xy-planet fås ur $x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ 2x^2-2x+y^2=0$.
Efter kvadratkomplettering fås ekvationen $\frac{(x-1/2)^2}{1/4}+\frac{(y)^2}{1/2}=1$ vilket visar att γ är en ellips med halvaxlarna 1/2 och $1/\sqrt{2}$. Låt D vara området innanför γ.
Stokes'sats är $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$. Vi har $\nabla\times\mathbf{A} = (x, 2z-2y, z)$. Vidare är $\hat{\mathbf{n}} = (1,0,1)/\sqrt{2}$. Alltså är $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \frac{(x+z)}{\sqrt{2}}dS$. På S är

$z = 1-x, dS = \sqrt{2}dxdy$, så att $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D dxdy = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Svar: $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

6. a. grad $f = \nabla f = (2xz, 2, x^2)$ och div grad $f = \nabla\cdot$ grad $f = 2z$.
   b. grad $f = \nabla f = (2xz, 2, x^2)$
   rot grad $f = \nabla\times$ grad $f = (0,0,0)$ (vilket inträffar för alla f).
   c. rot $\boldsymbol{F}$ är en vektor, grad är ej definierad för en vektor, alltså grad rot $\boldsymbol{F}$ ej definierad.
   d. rot $\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = (z, 2z, 2)$
   div rot $\boldsymbol{F} = \nabla\cdot$ rot $\boldsymbol{F} = 0$ (vilket inträffar för alla $\boldsymbol{F}$).

Svar: div grad $f = 2z$, rot grad $f = (0,0,0)$, grad rot $\boldsymbol{F}$ ej definierad, div rot $\boldsymbol{F} = 0$.

7. $\boldsymbol{r}'(t) = (3\cos t, 4, -3\sin t) \Rightarrow |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{9\cos^2 t + 16 + 9\sin^2 t} = 5$

$$\int_\gamma ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\boldsymbol{r}'(t)|dt = 5\pi$$

$$\int_\gamma \boldsymbol{r}ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \boldsymbol{r}(t)|\boldsymbol{r}'(t)|dt = 5\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3\sin t, 5+4t, 3\cos t)dt = 5(0, 5\pi, 6)$$

svar $\boldsymbol{r}_{TP} = (0, 5, 6/\pi)$

8. Ytorna Σ_1 och Σ_2 har samma rand, nämligen enhetscirkeln $\gamma : x^2+y^2=1, z=0$ med samma Orientering. Vidare är $div(\mathbf{F}) = 0$.
F kontinuerligt deriverbar och $div(\mathbf{F}) = 0$ ger att det finns en kontinuerlig vektorpotential **A** så att $\mathbf{F} = rot(\mathbf{A})$. Vi därför kan använda Stokes sats

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} rot(\mathbf{A})\bullet\hat{\mathbf{n}}_1\, d\sigma_1 = \oint_\gamma \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma_2} rot(\mathbf{A})\bullet\hat{\mathbf{n}}_2\, d\sigma_2 = \Phi_2$$ .Liksom $\Phi_2 = \Phi_1$

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\, d\sigma_1 = \left[\hat{\mathbf{n}}\, d\sigma_1 = \mathbf{e}_z dxdy\right] = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbf{F}\bullet\mathbf{e}_z dxdy =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} 3x^2dxdy = \int_0^1\left[\int_0^{2\pi} 3r^2\cos\varphi\right]rdr = \frac{3\pi}{4}$$

Svar $\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{3\pi}{4}$

9. Formelblad ger med $\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{\partial\Phi}{\partial w} = 0$ och

$\Delta\Phi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right]$. Vi behöver skalfaktorer h_u, h_v, h_w .

$\mathbf{r} = \left(u^2 - v^2, 2uv\cos(w), 2uv\sin(w)\right)$ ger skalfaktorer

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = (2u, 2v\cos w, 2v\sin w) \Rightarrow h_u = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right| = 2\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (-2v, 2u\cos w, 2u\sin w) \Rightarrow h_v = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| = 2\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (0, .2uv\sin w, 2uv\cos w) \Rightarrow h_w = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}\right| = 2|uv| = 2uv$$

vi får $\Delta\Phi = \frac{1}{2uv\left(u^2+v^2\right)}\frac{\partial}{\partial u}\left[2uv\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right]$, detta ger att $\Delta\Phi = 0$ om

$$\frac{d}{du}\left[u\frac{d\Phi}{du}\right] = 0 \Rightarrow u\frac{d\Phi}{du} = K \Rightarrow \frac{d\Phi}{du} = \frac{K}{u} \Rightarrow \Phi(u) = K\ln u + B$$

Svar : $\Phi(u) = K\ln|u| + B,\ K, B\in\mathbb{R}$.

10. **F** är kontinuerligt deriverbar. Enligt formelbladet är

$$rot(\mathbf{F}) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\begin{vmatrix} h_r\mathbf{e}_r & h_\theta\mathbf{e}_\theta & h_\varphi\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_r r\sin^2\theta\cos^2\varphi & h_\theta r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi & -h_\varphi r\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ r\sin^2\theta\cos^2\varphi & r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi & -r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Detta ger att

$\mathbf{F} = \nabla\Phi$ som skall uppfylla

$$\begin{cases} \mathbf{A}_r = r\sin^2\theta\cos^2\varphi = \frac{1}{h_r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \\ \mathbf{A}_\theta = r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \\ \mathbf{A}_\varphi = -r\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Sedvanliga metoder ger att $\Phi = \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \text{konstant} = \frac{1}{2}x^2 + \text{konstant}$

Det arbete som **F** utför längs den sträcka som går från punkten (0,0,0) till punkten(2,0,0).

ges av $\int_{(0,0,0)}^{(2,0,0)} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \Phi(2,0,0) - \Phi(0,0,0) = 2$

Svar : 2

11. Ytan Σ kan skrivas $\left(\frac{x+a}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1$ är den del av ellipsoiden med medelpunkt i *(-a,0,0)* och halvaxlarna *2a, a* och *a,* som ligger på negativa sidan av *yz*-planet. Fältet **F** är singulärt i origo, men utanför origo är det kontinuerligt deriverbart och kan skrivas på en enkel form i sfäriska koordinater

$\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$. Vi har $\nabla\bullet\mathbf{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{1}{r^2}\right) = 0, r \neq 0$.

Vi slutar ytan Σ med $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3a^2}{4}, x < 0, \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_r$.

Gauss´sats ger

$\iint_{\Sigma-\Sigma_1} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iiint_V \nabla\bullet\mathbf{F}dv = 0$ och vi får då

$$\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iint_{\Sigma_1} \frac{\mathbf{e_r}}{r^2}\bullet\mathbf{e_r}d\sigma =$$

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{1}{r^2}d\sigma = \frac{4}{3a^2}\text{area av } \Sigma_1 = \frac{4}{3a^2}\left(\frac{4\pi 3a^2/4}{2}\right) = 2\pi$$

Svar: 2π

12. Eftersom **F** är källfritt har det en vektorpotential **A** och kan skrivas $\mathbf{F} = rot(\mathbf{A})$.

Vi får då

$\iiint_V (\mathbf{r}\bullet\mathbf{F}(\mathbf{r}))dv = \iiint_V rot(\mathbf{A})\bullet\mathbf{r}dv.$

Nu gäller $div(\mathbf{A}\times\mathbf{r}) = \mathbf{r}\bullet rot(\mathbf{A}) - \mathbf{A}\bullet\underbrace{rot(\mathbf{r})}_{=0} = \mathbf{r}\bullet rot(\mathbf{A})$ (se ex 11.16 sid 324 i kursboken).

Gauss´sats ger

$\iiint_V (\mathbf{r}\bullet\mathbf{F}(\mathbf{r}))dv = \iiint_V rot(\mathbf{A})\bullet\mathbf{r}dv = \iiint_V div(\mathbf{A}\times\mathbf{r})dv = \oiint_S (\mathbf{A}\times\mathbf{r})\bullet\hat{\mathbf{n}}d\sigma$.

Nu är $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_r$ på sfären varför $(\mathbf{A}\times\mathbf{r})\bullet\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{A}\times\mathbf{r})\bullet\mathbf{e}_r = \mathbf{A}\bullet(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_r) = 0$ på sfären

Svar: $\iiint_V (\mathbf{r}\bullet\mathbf{F}(\mathbf{r}))dv = 0$