KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2006-01-17, kl. 14.00-19.00
5B1117, matematik III för E och ME (6p)

- Om du redan är godkänd (dvs har minst 6 godkända lappskrivningar) så skall du endast räkna uppgifter från B-delen.
- Om du inte är godkänd får du räkna uppgifter från både A-delen och B-delen. För uppgifter från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar din bonuspoäng till 18p.

Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 18, 25 och 31 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning.
Lösningsförslaget skall textförklaras. **Bristande läsbarhet ger poängavdrag.**

Hjälpmedel: Medföljande formelblad för matematik III.

Del A, 3-poängsuppgifter

1. En tunn platta som ges av $z = 1 + xy$, $x^2 + y^2 \le 1$ har masstätheten $\sqrt{1+x^2+y^2}$ per ytenhet i varje punkt (x,y,z) på plattan. Bestäm plattans totala massa.

2. Beräkna $\iiint_K z\,dxdydz$, då K är den del av enhetsklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$, som ligger inom en kon med spets i origo. Konens halva toppvinkel$=\frac{\pi}{4}$ och den har den positiva $z-$axeln som axel.

3. Beräkna $\int_\gamma \left(\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}\right)dx + \frac{x}{x+y}dy$. där kurvan γ är den del av ellipsen $x^2+4y^2=4$ som går från (0,1) till (2,0) i första kvadranten.

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \left(z^2, x^2, y^2\right)$ ut ur ytan $x^2+y^2+z^2=1, z \ge 0$.

5. Beräkna $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där Γ är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z^2=1$ och $x+z=1$. kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad, och vektorfältet $\mathbf{F} = \left(y^2z^2e^{xz}+z^2,\ 2yze^{xz}+zx,\ y^2(1+xz)e^{xz}+2xy\right)$.

6. Låt $f(x,y,z) = x^2z + 2y$ och $\boldsymbol{F} = (3x + z^2, 2x + y, yz)$.
Avgör vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem i förekommande fall:
a. div grad (f) b. rot grad (f) c. grad rot$(\boldsymbol{F})$ d. div rot $(\boldsymbol{F})$.

7. Beräkna tyngdpunkten $\boldsymbol{r}_{TP} = \int_\gamma \boldsymbol{r}ds \,/ \int_\gamma ds$ för en homogen tråd γ vars läge i rummet ges i parameterform av $\boldsymbol{r}(t) = (3\sin t, 5+4t, 3\cos t), \frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Del B, 4-poängsuppgifter

8. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ och två orienterade ytor Σ_1 och Σ_2 definieras genom

$$\mathbf{F} = \left(2y^2+x\right)\mathbf{e}_x + \left(2xz-y\right)\mathbf{e}_y + 3x^2\mathbf{e}_z$$
$$\Sigma_1 = x^2+y^2 \le 1, z=0, \quad \hat{\mathbf{n}}_1 \bullet \mathbf{e}_z > 0,$$
$$\Sigma_2 = x^2+y^2+2z^2 = 1, z \ge 0 \quad \hat{\mathbf{n}}_2 \bullet \mathbf{e}_z \ge 0,$$

Visa att flödet Φ_1 av $\mathbf{F}$ över Σ_1 är lika med flödet Φ_2 av $\mathbf{F}$ över Σ_2 och beräkna flödet av Φ_2.

9. Ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u,v,w) definieras genom

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv\cos(w) \quad u,v \ge 0, 0 \le w \le 2\pi \\ z = 2uv\sin(w) \end{cases}$$

Bestäm den allmänna lösningen till Laplaces ekvation $\Delta\Phi = 0$ som beror på u (dvs $\Phi = \Phi(u)$ oberoende av u och w).

10. I sfäriska koordinater är vektorfältet $\mathbf{F}$ definierat genom
$\mathbf{F} = r\sin^2\theta\cos^2\varphi\mathbf{e}_r + r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\mathbf{e}_\theta - r\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi$.
Beräkna det arbete som $\mathbf{F}$ utför längs den sträcka som går från punkten (0,0,0) till punkten(2,0,0).

11. Givna ytan $\Sigma : x^2 + 2ax + 4y^2 + 4z^2 - 3a^2 = 0, x < 0$ och vektorfältet $\mathbf{F} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}(x,y,z)$.
Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ över Σ.

12. Beräkna $\iiint_V (\mathbf{r} \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}))dv$, där V är området $x^2+y^2+z^2 \le 1$ och $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ är källfritt och kontinuerligt deriverbart i hela volymen V men för övrigt godtyckligt.
$\mathbf{r}$ är ortsvektorn $\mathbf{r} = (x,y,z)$.