Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2006-05-30, kl. 08.00-13.00
5B1117, matematik III för E och ME (6p)

1. $\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dxdy$, polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}$, D övergår till $D' = \left\{(r,v): 0 \le r \le \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}\right\}$ och $dxdy = rdrdv$ och vi får

$$\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D'} \cos(r^2)\,rdrdv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(r^2)\,rdrdv = \pi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(r^2)\,rdr =$$

$$\left[t = r^2, rdr = \frac{dt}{2}\right] = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{\pi}{2}\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Svar $\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dxdy = \frac{\pi}{2}$.

2.Man kan integrera direkt genom att parametrisera varje del av kurvan. Men det är värt att undersöka om det går att byta ”integrationsväg”(eller hitta potential)
Punkten (0,0) är singulär så vi får inte deformera kurvan över denna, men vi kan t. ex byta till halvcirkelbåge. Oberoende av vägen **kräve**r att fältet skall vara kontinuerligt deriverbar i det området som innehåller integrationsväg dvs $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Vi får $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$ utanför origo där integrationsvägen inte passerar. Vi ersätter integrationsväg med halvcirkelbågen $C: x^2+y^2 = 1, y<0$ som kan parametriseras $x = \cos t, y = \sin t, t: \pi/2 \to 3\pi/2$.

Vi får $\int_\Gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \int_C \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{[\cos t(-\sin t) + \sin t(\cos t)]}{\cos^2 t + \sin^2 t}dt = 0$

Alternativt , kan man finna en potential

$$U = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} \Rightarrow \int_\Gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = U(0,1) - U(0,-1) = 0$$

3. Vi använder sfäriska koordinater och Stokes sats. I vårt fall är $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_r$: Vi beräknar

$$rot(\mathbf{F}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ 1 & r^3\sin\theta & r^2\sin\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(r^2\sin\theta\mathbf{e}_r + 2r^2\sin\theta\mathbf{e}_\theta + 3r^3\sin^3\theta\mathbf{e}_\varphi\right).$$

Härav $rot(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}} = rot(\mathbf{F})\cdot\mathbf{e}_r = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. På den givna ytan är $0 \le \varphi \le \pi/2; 0 \le \theta \le \pi/2$.

Och $d\sigma = 1^2\sin\theta\,d\theta d\varphi$. Stokes sats ger då

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma rot(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \iint_\Sigma \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\sigma = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi = \pi/2.$$

4. Komplettera S med ”botten” $S_1 = \{(x,y,z): x^2+y^2 \le 1\}$ så att $S + S_1$ blir rand till halvklottet $\Omega = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\}$. Använd Gauss´sats Använd

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_\Omega (z^2 + 2x^2z + 2y^2z)\,dxdydz$$, sfäriska koordinater ger

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta\, r\cos\theta\right)r^2\sin\theta\,drd\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r^4dr\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + 2\pi\int_0^1 2r^5dr\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)\left[\frac{-1}{3}\cos^2\theta\right]_0^{\pi/2} + 2\pi\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\pi\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{12}\right) = 3\pi/10$$

5.Vi använder $\nabla\times(\nabla\Phi) = \mathbf{0}$ för alla kontinuerligt deriverbara skalära funktioner. Detta ger att $\nabla\times(\nabla p) = \mathbf{0}$.Vi har då $\nabla\times(\rho\mathbf{a}) = -\nabla\times(\nabla p) = \mathbf{0}$. Utveckla vänstra ledet

$\nabla\times(\rho\mathbf{a}) = \nabla\rho\times\mathbf{a} + \rho\nabla\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$,som ger $\nabla\times\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho}(\nabla\times\mathbf{a})$. Vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\nabla\times\mathbf{a}$ ges av $(\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} = \left(\frac{-1}{\rho}\right)(\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} = 0$, vilket innebär att $\mathbf{a}$ är vinkelrät mot $\nabla\times\mathbf{a}$.

6. a) $\oint\!\!\oint_\Sigma \hat{\mathbf{n}}d\sigma$: vi använder Gauss universalsatsen $\oint\!\!\oint_\Sigma \Phi\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iiint_K grad(\Phi)dv$ med $\Phi = 1 \Rightarrow grad(\Phi) = \mathbf{0}$. Detta ger att $\oint\!\!\oint_\Sigma \hat{\mathbf{n}}d\sigma = \mathbf{0}$

b) $\iiint_K div(\hat{\mathbf{n}})dv$: här användas Gauss satsen

$\iiint_K div(\hat{\mathbf{n}})dv = \oint\!\!\oint_\Sigma (\hat{\mathbf{n}}\bullet\hat{\mathbf{n}})d\sigma = \oint\!\!\oint_\Sigma d\sigma =$ arean av ytan Σ

c) $\oint\!\!\oint_\Sigma (\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{n}})d\sigma$: här användes Gauss universalsatsen

$\oint\!\!\oint_\Sigma (\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{F})d\sigma = -\oint\!\!\oint_\Sigma (\mathbf{F}\times\hat{\mathbf{n}})d\sigma = -\iiint_K rot(\mathbf{F})dv$ med $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ fås

$\oint\!\!\oint_\Sigma (\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{n}})d\sigma = -\iiint_K rot(\mathbf{F})dv = -\iiint_K \underbrace{rot(\mathbf{r})}_{\mathbf{0}}dv = \mathbf{0}$

7.Vill använda Gauss´sats. Ytan S: $x^2+y^2+6z^2 = 4$, $z \ge 0$. är inte sluten. Vi sluter den med $S_1 = \{(x,y): \varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 4\}$ och $S_\varepsilon = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le \varepsilon^2\}$.Nu ytan $\Sigma = S \cup S_1 \cup S_\varepsilon$ Omsluter en kropp K som inte innehåller origo .

$$div(\mathbf{F}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\sin\theta}{1}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\right)\right] =$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-\sin 2\theta}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\frac{-\sin 2\theta}{r^2}\right)\right)\right] = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\sin 2\theta}{r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}\right) = 0, r \ne 0$$

Gauuss´sats ger då för $r \ne 0$

1) Vi beräknar $\iint_{S_1} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}d\sigma$

På $S_1 = \left\{(x,y): \varepsilon^2 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$ som ligger i $xy-$planet är $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ är $\mathbf{F} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{r^2}\mathbf{e}_r, \varepsilon \le r \le 2$.

Dvs $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ och $\iint_{S_1} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = 0$.

2) Vi beräknar $\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$

På $S_\varepsilon = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le \varepsilon^2\right\}$ är $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{e}_r, \mathbf{F} = \dfrac{\cos\theta}{\varepsilon^2}\mathbf{e}_r$, då $r = \varepsilon$.

Vidare är $\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\cos\theta}{\varepsilon^2}\mathbf{e}_r \bullet (-\mathbf{e}_r) = -\dfrac{\cos\theta}{\varepsilon^2}$ och $d\sigma = \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Vi får $\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = -\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos\theta}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta \right) = -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = -\pi\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = -\pi$

Svar $\iint_S \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = -\iint_{S_1} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma - \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \pi$