KTH-Matematik

Lösningsförlag till Tentamenskrivning, 2006-08-21, kl. 08.00-13.00
5B1117, matematik III för E och ME (6p)

1. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiderna
$z = 3x^2 + 4y^2$ och $z = 2x^2 + 3y^2 + 4$

Lösning

Paraboloiderna skär varandra längs kurvan $\begin{cases} z = 3x^2 + 4y^2 \\ z = 2x^2 + 3y^2 + 4 \end{cases}$

Kurvans projektion på xy-planet ges av $3x^2 + 4y^2 = 2x^2 + 3y^2 + 4$, vilket beskriver cirkeln $x^2 + y^2 = 4$. Kroppens projektionen D på xy-planet är cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 4$. Den sökta volymen är

$$\iint_D \left(2x^2 + 3y^2 + 4 - 3x^2 - 4y^2\right) dxdy = \iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

Polära koordinater $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ ger

$$\iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\int_{r=0}^{2} \left(4 - r^2\right) r dr \right] d\theta = 8\pi$$

Finner man området D ge 1p annars –1p för räknefel.

2. Beräkna $\displaystyle\oint\!\!\oint_{\partial \mathbf{K}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) d\sigma$

då $\mathbf{F} = \left(x^3 + z, y^3 + x, z^3 + y\right)$ och **K** är cylindern $\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1\right\}$.

lösning

Vi använder Gauss'sats (11.2) , som säger att

$$\oint\!\!\oint_{\partial \mathbf{K}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) d\sigma = \oint\!\!\oint\!\!\oint_{\mathbf{K}} \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) dxdydz$$

Här har vi att

$$\operatorname{div}\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial FP}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Om vi inför cylindriska koordinater enligt

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi\ , \rho \ge 0, 0 \le \varphi < 2\pi \\ z = z \end{cases}$$

så ges cylinder **K** av $\left\{(\rho,\varphi,z) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z \le 1\right\}$ och funktionaldeterminanten blir

$$\det \frac{d(x,y,z)}{d(\rho,\varphi,z)} = \rho\,.$$

Vi kan alltså beräkna integralen enligt

$$\oint\!\!\oint_{\partial \mathbf{K}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) d\sigma = \oint\!\!\oint\!\!\oint_{\mathbf{K}} \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) dxdydz = 3\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \int_{\rho=0}^{2} \left(\int_{z=0}^{1} \left(z^2 + \rho^2\right) dz \right) \rho d\rho =$$

$$= 6\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\rho + \rho^3 \right) dr = 6\pi \left[\frac{1}{6}\rho^2 + \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = 6\pi \frac{5}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

<u>**SVAR**</u>: $\dfrac{5\pi}{2}$

---

3. Vektorfältet $\mathbf{F} = \mathbf{e}_r + r^2 \sin^2\theta \mathbf{e}_\theta + r\mathbf{e}_\varphi$ är givet i sfäriska koordinater.

Beräkna $\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ är randen till den del av sfären $x^2+y^2+z^2=1$ som ligger i första oktanten$\left(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right)$.

Orientering: moturs sett från punkten$(5,5,5)$

Lösning

Vi använder sfäriska koordinater och Stokes sats. I vårt fall är $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_r$: Vi beräknar

$$rot(\mathbf{F}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ 1 & r^3\sin\theta & r^2\sin\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(r^2\sin\theta\mathbf{e}_r + 2r^2\sin\theta\mathbf{e}_\theta + 3r^3\sin^3\theta\mathbf{e}_\varphi\right).$$

Härav $rot(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}} = rot(\mathbf{F})\cdot\mathbf{e}_r = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$. På den givna ytan är $0\le\varphi\le\pi/2; 0\le\theta\le\pi/2$.

Och $d\sigma = 1^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$. Stokes sats ger då

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma rot(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_\Sigma \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\sigma = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi/2.$$

4-poängsuppgifter

4. Låt r,θ och φ vara de tre sfäriska koordinaterna och $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^n\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$.

Bestäm de n för vilka $\oint_\gamma rot(\mathbf{F})\bullet dr = 0$, för varje sluten kurva γ som inte går genom origo.

Motivera ordendligt!

Lösning

Stokes sats ger $\oint_\gamma rot(\mathbf{F})\bullet dr = \iint_S rot\left(rot(\mathbf{F})\right)\bullet d\boldsymbol{\sigma} = 0$ för varje ytan S med rand γ som inte går genom origo. Vi beräknar $rot(\mathbf{F})$ i sfäriska koordinater och får

$rot(\mathbf{F}) = r^{n-1}2\cos\theta\mathbf{e}_r - (n+1)r^{n-1}\sin\theta\mathbf{e}_\theta$ och $rot\left(rot(\mathbf{F})\right) = \left(2-n(n+1)\right)\sin\theta r^{n-2}\mathbf{e}_\varphi$.

Integranden är därför noll i hela rummet om $2-n(n+1)=0 \Rightarrow n=1,-2$. Då blir integranden noll för alla kurvor. Om $n=-2$ är vektorfältet singulärt och vi måste undvika origo.

Svar Integranden är noll om n=1 eller n=-2 Om γ ej går genom origo.

5. Låt $\mathbf{F} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - z, x - \dfrac{x}{x^2+y^2}, y + x^2\right)$

och $S_1 = \left\{(x,y,z): 4x^2+4y^2+z^2 = 40\right\}, S_2 = \left\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2 = 0, z>0\right\}$.

Beräkna det arbete som ventrofältet $\mathbf{F}$ uträttar längs skärningskurvan γ mellan S_1 och S_2.

Lösning

Sätt $x^2+y^2=z^2$ från S_2 in S_1 och får att skärningskurvan γ mellan S_1 och S_2 blir

$$\gamma: \begin{cases} 5(x^2+y^2) = 40 \\ z^2 = x^2+y^2, z>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2}, z>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \quad 0\le t\le 2\pi \\ z = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Parametrisering av skärningskurvan γ mellan S_1 och S_2 blir då

$\mathbf{r}(t) = \left(2\sqrt{2}\cos t, 2\sqrt{2}\sin t, 2\sqrt{2}\right)$ och $\mathbf{r}'(t) = \left(-2\sqrt{2}\sin t, 2\sqrt{2}\cos t, 0\right)$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\sin t - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\cos t - \frac{2\sqrt{2}}{8}\sin t, 2\sqrt{2}\sin t + 8\cos^2 t\right)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet\mathbf{r}'(t)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\sin t-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\cos t-\frac{2\sqrt{2}}{8}\sin t,2\sqrt{2}\sin t+8\cos^2 t\right)\bullet\left(-2\sqrt{2}\sin t,2\sqrt{2}\cos t,0\right)=$$

$$=8\sin t+8\cos^2 t-1$$

Arbete ges då av

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet\mathbf{r}'(t)dt=\int_0^{2\pi}\left(8\sin t+8\cos^2 t-1\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(8\sin t+8\left(\frac{\cos 2t}{2}+\frac{1}{2}\right)-1\right)dt=6\pi$$

Svar 6π.

6. Bestäm konstanterna a,b,c så att

$$\begin{cases}x=u^2+av^2\\ y=2uv\\ z=bu+cv+w\end{cases}$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u,v,w). (2p)
Beräkna de kroklinjiga komponenterna A_u,A_v,A_w av vektorfältet $\mathbf{A}=(x,y,3z)$. (2p)

Lösning:

Låt $\mathbf{r}(u,v,w)=\left(u^2+av^2,2uv,bu+cv+w\right)$, vi får

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=(2u,2v,b)$, $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=(2av,2u,c)$, $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=(0,0,1)$.Dessa vektorer blir ortogonala om

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=b=0\Rightarrow b=0$, $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=c=0\Rightarrow c=0$,$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=4auv+4uv=0\Rightarrow a=-1$.

Basvektorerna blir $\mathbf{e}_u=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}/\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right|=\frac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$,pss $\mathbf{e}_v=\frac{(-v,u,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $\mathbf{e}_v=(0,0,1)$.

Vi beräknar komponenterna av vektor $\mathbf{A}=(x,y,3z)=\left(u^2-v^2,2uv,3w\right)$ i den nya ON-basen och får att $A_u=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_u=\left(u^2-v^2,2uv,3w\right)\cdot\frac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}=u\sqrt{u^2+v^2}$. På samma sätt fås

$Av=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_v=v\sqrt{u^2+v^2}$ och $A_w=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_w=3w$

Svar $a=-1,b=c=0,A_u=u\sqrt{u^2+v^2},A_u=v\sqrt{u^2+v^2},A_w=3w$

7. a) Låt $\mathbf{r}$ vara ortsvektorn i rymden och $\mathbf{B}$ vara en kontinuerligt deriverbart vektorfält i rymden. Visa att $div(\mathbf{B}\times\mathbf{r})=rot(\mathbf{B})\bullet\mathbf{r}$ (1p)

b) Låt $\Omega=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ och vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vara källfritt och kontinuerligt deriverbar i hela Ω. Beräkna $\oiiint_\Omega(\mathbf{F}(\mathbf{r})\bullet\mathbf{r})dv$. (3p)

Lösning

a) $div(\mathbf{B}\times\mathbf{r})=\mathbf{r}\bullet\mathbf{rot}(\mathbf{B})-\mathbf{B}\bullet rot(\mathbf{r})=\left[rot(\mathbf{r})=\mathbf{0}\right]=rot(\mathbf{B})\bullet\mathbf{r}$

b) Eftersom fältet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ är källfritt och kontinuerligt deriverbar i hela Ω .så har det en vektorpotential $\mathbf{B}$ och kan skrivas $\mathbf{F}=rot(\mathbf{B})$. Insättes detta får vi

$$\oiiint_\Omega(\mathbf{F}(\mathbf{r})\bullet\mathbf{r})dv=\oiiint_\Omega(\mathbf{rot(B)}\bullet\mathbf{r})dv=[\text{enligt a)}]=\oiiint_\Omega div(\mathbf{B}\times\mathbf{r})dv=$$

[Gauus sats]$=\oiint_S(\mathbf{B}\times\mathbf{r})\bullet\hat{\mathbf{n}}d\sigma$, där S(sfär) är randytan till Ω.

Nu är $\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{e}_r$ på sfären varför

$\left(\mathbf{B}\times\mathbf{r}\right)\bullet\hat{\mathbf{n}}=\left(\mathbf{B}\times\mathbf{r}\right)\bullet\mathbf{e}_r=\mathbf{B}\bullet\left(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_r\right)=0$ på sfären

Svar: $\oiiint\limits_{\Omega}(\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\right)\bullet\mathbf{r})dv=0$