Lösningsförslag till tentamen skrivning i 5B1117
Matematik III för E och ME, 2007-08-28

1.

$$\iiint_{\mathbf{K}} z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dy \int_0^{2y^2} dx \int_0^x dz z =$$
$$= \int_0^1 dy \int_0^{2y^2} dx [\frac{1}{2}z^2]_0^x = \int_0^1 dy \int_0^{2y^2} dx \frac{1}{2}x^2 =$$
$$= \int_0^1 dy [\frac{1}{6}x^3]_0^{2y^2} = \int_0^1 dy \frac{1}{6}2^3 y^6 = \frac{4}{3}[\frac{1}{7}y^7]_0^1 = \frac{4}{21}.$$

<u>Svar:</u> Integralen är lika med $\frac{4}{21}$.

2. Detta kan visas genom att använda Greens formel

$$\iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right) dxdy = \oint_C (Pdx + Qdy)$$

med $Q = x/2$ och $P = -y/2$,

$$\frac{1}{2}\oint_C (-ydx + xdy) = \frac{1}{2}\iint_S dxdy \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) =$$
$$= \iint_S dxdy = \text{Arean av S.}$$

Obs. att beviset inte bara gäller för S ovan utan för ett godtyckligt område S som omsluts av en enkel, sluten kurva C.

3. Variabelsubstitutionen: $u = 3x$, $v = 2y$ och $w = z$ ger $9x^2 + 4y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$, $dxdydz = (du/3)(dv/2)(dw) = dudvdw/6$, och integrationsområdet blir $-\infty < u, v, w < \infty$. $\Rightarrow$ Integralen är lika med

$$\iint_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{6}\frac{1}{(u^2+v^2+w^2)} e^{-(u^2+v^2+w^2)} dudvdw\,.$$

Med sfäriska koordinater, $u = r\sin(\theta)\cos(\phi)$, $v = r\sin(\theta)\sin(\phi)$, $w = r\cos(\theta)$, blir $u^2+v^2+w^2 = r^2$, $dudvdw = r^2\sin(\theta)\,drd\theta d\phi$, och integrationsområdet $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$, och $0 \le \phi \le 2\pi$. $\Rightarrow$ Integralen är lika med

$$\frac{1}{6}\int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta)d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}e^{-r^2} d\phi = \frac{1}{6}4\pi \int_0^\infty dr\, e^{-r^2} =$$
$$= [\text{ Ledningen }] = \frac{2\pi}{3}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi^{3/2}}{3}.$$

Alternativlösning: Variabelbyten $x = r\sin(\theta)\cos(\phi)/3$, $y = r\sin(\theta)\sin(\phi)/2$, $z = r\cos(\theta)$, ger

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

osv. (som måste beräknas för att få full poäng) och ger

$$dxdydz = \left| \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)} \right| drd\theta d\phi = \frac{1}{6} r^2 \sin(\theta)\, drd\theta d\phi$$

osv., som ger direkt (r, θ, ϕ)-integralen ovan.

Svar: Integralen är lika med $\pi^{3/2}/3$.

4. Ytan kan, t.ex., parameteriseras genom

$$\begin{aligned} x &= u\cos(v) \\ y &= u\sin(v) \\ z &= 1 - u\cos(v) \end{aligned}$$

där $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$. $\Rightarrow$ $(\mathbf{r} = (x, y, z))$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos(v) & \sin(v) & -\cos(v) \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & u\sin(v) \end{vmatrix} = (u, 0, u)$$

ger

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(u,0,u)}{\sqrt{u^2+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

(obs. att $u \ge 0$).

Arean kan beräknas genom $\iint_{\mathbf{D}} dS$ där (med parameterframställningen osv. ovan),

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv = |(u,0,u)| dudv = \sqrt{2} u\, dudv$$

och $\mathbf{D}$ definierad genom $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$. $\Rightarrow$

$$\text{Arean} = \iint_{\mathbf{D}} dS = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv\, \sqrt{2} u = (2\pi)\sqrt{2} \int_0^1 du\, u = \pi\sqrt{2}.$$

Svar: (a) $\hat{\mathbf{n}} = (1,0,1)/\sqrt{2}$.[1] (b) Arean av S är $\pi\sqrt{2}$.

5. Ansatsen $\mathbf{A}$ =gradΦ ger

$$A_r = r\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{1}$$

$$A_\theta = r\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\phi) = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \tag{2}$$

$$A_\phi = -r\sin(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi) = \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}. \tag{3}$$

Ekv. (1) ovan ger ($h_r = 1$),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = r\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + C_1(\theta,\phi) \tag{4}$$

[1] Obs. att orienteringen är ospecificierad, och därför är svaret $\hat{\mathbf{n}} = -(1,0,1)/\sqrt{2}$ lika bra.

där C_1 är oberoende av r. Det och Ekv. (1) ovan ger ($h_\theta = r$)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + C_1(\theta,\phi)\right) =$$
$$= r\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial C_1(\theta,\phi)}{\partial \theta} = r\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\phi)$$

dvs.,

$$\frac{\partial C_1(\theta,\phi)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow C_1(\theta,\phi) = C_2(\phi)$$

där C_2 är oberoende av r och θ. Detta, Ekv. (4) och (3) ovan ger[2] ($h_\phi = r\sin(\theta)$),

$$\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{2}r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + C_2(\phi)\right) =$$
$$= -r\sin(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{dC_2(\phi)}{d\phi} = -r\sin(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi),$$

dvs.,

$$\frac{dC_2(\phi)}{d\phi} = 0 \Rightarrow C_2(\phi) = C \text{ (konstant)}.$$

Det visar att $\mathbf{A}$=gradΦ där

$$\Phi = \frac{1}{2}r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)$$

(obs. C ovan var godtycklig, och vi satte $C = 0$).

(b) Obs. att Φ ovan i kartesiska koordinater är lika med $\Phi = x^2/2$, och med $P = (0,0,0)$ och $Q = (2,0,0)$,

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(Q) - \Phi(P) = 2^2/2 - 0 = 2.$$

Anmärkning: Det finns många olika sätt att lösa uppgiften. T.ex. kan man lösa (a) genom att beräkna rot$\mathbf{A}$, som ger rot$\mathbf{A} = (0,0,0) \Rightarrow \mathbf{A}$ har skalär potential, eller (b) genom att bestämma en parameterframställning av linjen Γ i någon typ av koordinater men det kan bli ganska mycket job. Man kan också lösa uppgiften genom att visa att $\mathbf{A}$ i kartesiska koordinater är lika med $\mathbf{A} = x\mathbf{e}_x = (x,0,0)$ (genom att stoppa in $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$), som gör resten av uppgiften nästan trivial.

6. (a)

$$\text{Flödet} = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbf{K}} (\nabla\cdot\mathbf{A})dxdydz =$$
$$\iiint_{\mathbf{K}} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}2x^2 + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}(z+x)dxdydz\right)}_{4x+2} = \int_0^1 dx \int_{y^2+z^2\leq 1} dydz(4x+2) =$$
$$= \int_0^1 dx(4x+2)\pi = \pi[2x^2+2x]_0^1 = 4\pi.$$

[2]obs. att vi nu kan skriva $dC_2/d\phi$ därför att C_2 är en envariabelfunktion

(b)

$$\text{Flödet} = \oiint_{S_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_3} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

där

$$S_1 : x = 0, \quad y^2+z^2 \le 1, \quad d\mathbf{S} = (-1,0,0)dydz$$
$$\oiint_{S_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{y^2+z^2\le 1} (0,y,z)\cdot(-1,0,0)dydz = 0;$$

$$S_2 : x = 1, \quad y^2+z^2 \le 1, \quad d\mathbf{S} = (1,0,0)dydz$$
$$\oiint_{S_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{y^2+z^2\le 1} (2,y,z+1)\cdot(1,0,0)dydz =$$
$$= 2\int_{y^2+z^2\le 1} dydz = 2\pi;$$

$$S_3 : 0 \le x \le 1, \quad y = \cos(u), \quad z = \sin(u), \quad 0 \le u \le 2\pi$$
$$d\mathbf{S} = \pm\frac{\partial\mathbf{r}}{dx}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{du}dxdu = \pm(0,\cos(u),\sin(u))dxdu,$$

$\hat{\mathbf{n}}$ utåt $\Rightarrow d\mathbf{S} = +(0,\cos(u),\sin(u))dxdu$, och

$$\oiint_{S_3} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le u\le 2\pi}} (2x^2,\cos(u),\sin(u)+x)\cdot(0,\cos(u),\sin(u))dxdu =$$
$$= \int_0^{2\pi} du\int_0^1 dx(1+x\sin(u)) = 2\pi.$$

$\Rightarrow$

$$\text{Flödet} = 0 + 2\pi + 2\pi = 4\pi.$$

7. $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ och ledningen ger

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y \qquad \Rightarrow -x = -\frac{\partial}{\partial z}A_y \tag{5}$$
$$B_y = \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z \qquad \Rightarrow 0 = 0 \text{ (o.k.)} \tag{6}$$
$$B_z = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \qquad \Rightarrow 2x + z = \frac{\partial}{\partial x}A_y. \tag{7}$$

Ekv. (5) ger $A_y(\mathbf{r}) = xz + C_1(x,y)$, och med (7),

$$2x + z = \frac{\partial}{\partial x}(xz + C_1(x,y)) = z + \frac{\partial}{\partial x}C_1(x,y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}C_1(x,y) = 2x$$

som ger $C_1(x,y) = x^2$, t.ex. (vi sättar integrationkonstanten till 0 därför att vi bara behöver en vektorpotential). Detta visar att $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, xz + x^2, 0)$ är ett vektorpotential till $\mathbf{B}$.

Med $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ och Stokes' sats,

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

som visar att flödesintegralen ovan bara beror på randen C till S (orienteringen är enligt högerhandsregeln).

Om $S : z = 1 + (x^2 + y^2 - 1)^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$ så är randen till S $C : x^2 + y^2 = 1$, och C kan parameteriseras genom $x = \cos(u)$, $y = \sin(u)$, $z = 1$, och $0 \leq u \leq 2\pi$. Högerhandsregeln ger $u : 0 \to 2\pi$ (moturs), motsvarande $\hat{\mathbf{n}}$ uppåt. Flödesintegralen blir därför,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_C (0, xz + x^2, 0) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (x(u)z(u) + x(u)^2) \frac{dy(u)}{du} du = \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos(u) + \cos^2(u)(-\cos(u))du = -\int_0^{2\pi} [\cos^2(u) + \cos^3(u)]du = \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos^2(u)du = -\pi
\end{aligned}$$

därför att $\int_0^{2\pi} \cos^3(u)du = 0$ [som visas genom symmetribetraktelser, t.ex.,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^3(u)du &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3(u)du \quad \text{[p.g.a. periodiciteten av cos]} \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^3(t-\pi)dt \quad \text{[variabelbyte: } u = t - \pi\text{]} \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos^3(t)dt \quad [\cos(t-\pi) = -\cos(t)]
\end{aligned}$$

som visar att $\int_0^{2\pi} \cos^3(u)du = -\int_0^{2\pi} \cos^3(u)du$].