KTH Matematik

Tentamenskrivning i 5B1117 Matematik III för E och ME, 2008-01-17, kl. 14.00-19.00

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 11, 16 respektive 22 poäng.
OBS! Eventuella bonuspoäng från tidigare gäller ej.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Hjälpmedel: medföljande formelblad i vektoranalys.

---

1. Beräkna integralen
$$\iiint_{\mathbf{K}} e^{-x-z}\,dxdydz$$
där $\mathbf{K}$ definieras genom $0 \leq x \leq y \leq z < \infty$. (3p)

2. Bestäm konvergensmängden till potensserien
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3(n+1)^2\,2^n\,x^{2n}.$$
. (3p)

3. Beräkna linjeintegralen $\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y + 2e^{-x^2-y^2}\mathbf{e}_z$ och L är ellipsen $x^2 + 4y^2 = 9$, på två olika sätt:

   (a) direkt, (b) med hjälp av Stokes sats. (1+2p)

   L är orienterad så att dess tangentvektor är parallel med $\mathbf{e}_y$ i punkten $(3, 0, 0)$.

4. Beräkna arean av ytan definierad genom
$$x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = \frac{2}{3}(u^3 + v^3)$$
där $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 1$. (3p)

Var god vänd

5. Ett vektorfält $\mathbf{B}$ och två orinterade ytor S_1 och S_2 definieras genom ((x, y, z) är kartesiska koordinater i $\mathbf{R}^3$)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{B} = (2y^2 + x)\mathbf{e}_x + (2xz - y)\mathbf{e}_y + 3x^2\mathbf{e}_z, \\
&S_1 : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_z > 0, \\
&S_2 : \quad x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, \quad z \geq 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_z \geq 0
\end{aligned}
$$

($\hat{\mathbf{n}}$ är ytans normalvektor).

(a) Visa att flödet Φ_1 av $\mathbf{B}$ genom S_1 (dvs., $\Phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$) är lika med flödet Φ_2 av $\mathbf{B}$ genom S_2. (2p)

(b) Beräkna Φ_1. (2p)

6. Ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w) definieras genom

$$
\begin{aligned}
x &= (u^2 - v^2) \\
y &= 2uv\cos(w) \\
z &= 2uv\sin(w)
\end{aligned}
$$

där $u, v \geq 0$ och $0 \leq w \leq 2\pi$.

(a) Bestäm skalfaktorer h_u, h_v, h_w och enhetsvektoren $\mathbf{e}_u$. (1p)

(b) Bestäm den allmänna lösningen till Laplaces ekvationen $\triangle\Phi = 0$ som bara beror på u (dvs., $\Phi = \Phi(u)$ oberoende av v och w). (3p)

7. Bestäm den slutna kurvan C i xy-planet (utan dubbelpunkter), så att linjeintegralen $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ av vektorfältet $\mathbf{A} = (y^3, 3x - x^3, 0)$ blir så stor som möjligt, då C genomlöps ett varv moturs. Beräkna den maximala linjeintegralen. (4p)

Lösningsförslag

1.

$$\iiint_{\mathbf{K}} e^{-x-z}\,dxdydz = \int_0^\infty dz \int_0^z dy \int_0^y dxe^{-x-z} =$$

$$= \int_0^\infty dz \int_0^z dy[-e^{-x-z}]_{x=0}^y = \int_0^\infty dz \int_0^z dy(e^{-z} - e^{-y-z}) =$$

$$\int_0^\infty dz[ye^{-z} + e^{-z-y}]_{y=0}^z = \int_0^\infty dz[ze^{-z} + e^{-2z} - e^{-z}] = [-ze^{-z} - \frac{1}{2}e^{-2z}]_{z=0}^\infty = \frac{1}{2}.$$

2. Om man skriver summan som $\sum_{n=1}^\infty u_n$, $u_n = 3(n+1)^2\,2^n\,x^{2n}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{3(n+2)^2\,2^{n+1}\,x^{2n+1}}{3(n+1)^2\,2^n\,x^{2n}}\right| = \left|2x^2\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}\right|,$$

och

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 2x^2$$

som är mindre än 1 om $|x| < 1/\sqrt{2}$, och större än 1 om $|x| > 1/\sqrt{2}$. $\Rightarrow$ (Kvotkriteriet) Serien konvergerar om $|x| < 1/\sqrt{2}$ och divergerar om $|x| > 1/\sqrt{2}$.

För randpunkterna, dvs, $|x| = 1/\sqrt{2}$, är serien lika med $\sum_{n=1}^\infty 3(n+1)^2$, som divergerar ($(n+1)^2$ inte går mot 0 när $n\to\infty$).

Svar: Serien konvergerar för $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ och divergerar för $|x| \geq 1/\sqrt{2}$.

3. (a) Vi parametriserar L som $(x/3) = \cos(t)$, $(2y/3) = \sin(t)$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Det ger $d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}(t)}{\partial t}dt = (-3\sin(t), (3/2)\cos(t), 0)dt$ och

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}(-3\sin(t)y(t) - (3/2)\cos(t)x(t))dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-(9/2)\sin^2(t) - (9/2)\cos^2(t))dt = -(9/2)2\pi = -9\pi.$$

(b) Stokes sats ger $\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ där $S : x^2 + 4y^2 \leq 9$ och $z = 0$, orienteringen $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_z$, dvs., $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_z dxdy$. Vi beräknar

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 2e^{-x^2-y^2} \end{vmatrix} = -2\mathbf{e}_z + \ldots$$

(y- och z-komponenten av rot$\mathbf{A}$ behöver vi inte beräkna) som ger

$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{x^2+4y^2\leq 9}(-2)dxdy = -2\int_{(x/3)^2+(2y/3)^2\leq 1} dxdy = -2(3/2)3\pi = -9\pi$$

därför att $\int_{(x/a)^2+(y/b)^2\leq 1} dxdy = ab\pi$ (arean av ellipsen; $a, b > 0$).

4. Med $\mathbf{r} = (u^2, v^2, 2(u^3 + v^3)/3)$ beräkna vi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2u, 0, 2u^2) \times (0, 2v, 2v^2) = 4uv(-u, v, 1) \tag{1}$$

som ger ytintegrationselementet

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv = 4uv\sqrt{1 + u^2 + v^2}\, dudv. \tag{2}$$

Arean blir därför,

$$Arean = \int_0^1 du \int_0^1 dv 4uv\, \sqrt{1 + u^2 + v^2},$$

och med $r = u^2$, $s = v^2$ (obs. att $drds = 4uvdudv$),

$$Arean = \int_0^1 dr \int_0^1 ds(1 + r + s)^{1/2} = \int_0^1 dr \frac{2}{3}\, (1 + r + s)^{3/2}\Big|_{s=0}^1 =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 dr[(2 + r)^{3/2} - (1 + r)^{3/2}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}[(2 + r)^{5/2} - (1 + r)^{5/2}]_{r=0}^1 =$$

$$= \frac{4}{15}[3^{5/2} - 2^{5/2} - 2^{5/2} + 1] = \frac{4}{15}[9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1] = \frac{12}{5}\sqrt{3} - \frac{32}{15}\sqrt{2} + \frac{4}{15}.$$

Svar: Arean är lika med $\frac{12}{5}\sqrt{3} - \frac{32}{15}\sqrt{2} + \frac{4}{15} = 1.4066\ldots$.

5. (a) S_1 och S_2 har samma rand, nämligen linjen $L : x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ (med samma orinteringen). Vi visar att $\mathbf{B}$ är källfritt genom att beräkna

$$\text{div}\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x}(2y^2 + x) + \frac{\partial}{\partial y}(2xz - y) + \frac{\partial}{\partial z}3x^2 = 1 - 1 = 0.$$

div$\mathbf{B} = 0$ och $\mathbf{B}$ är kontinuerlig $\Rightarrow$ det finns ett kontinuerlig vektorpotential $\mathbf{A}$ så att $\mathbf{B}$ =rot$\mathbf{A}$. Vi därför kan använder Stokes sats,

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \text{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_2 \qquad \text{v.s.v.}$$

(b) Vi beräknar Φ_1: integrationselementet är $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_z dxdy$, och integrationsområdet är $x^2 + y^2 \leq 1$. Det ger ((r, ϕ) nedan är polära koordinater)

$$\Phi_1 = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 3x^2 dxdy = \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} d\phi\, 3r^2 \cos^2\phi = \frac{3}{4}\pi.$$

Svar: Flödet Φ_2 är lika med $3\pi/4$.

6. (a) $\mathbf{r} = (u^2 - v^2, 2uv\cos(w), 2uv\sin(w))$ ger skalfaktorer

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (2u, 2v\cos(w), 2v\sin(w)), \qquad h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = 2\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2v, 2u\cos(w), 2u\sin(w)), \qquad h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = 2\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = (0, -2uv\sin(w), 2uv\cos(w)), \qquad h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right| = 2|uv| = 2uv,$$

och

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u, v\cos(w), v\sin(w)).$$

(b) Skalfaktorer och ekv. på formelbladet med $\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0$ ger

$$\triangle\Phi = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right] = \frac{1}{2uv(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left[2uv\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right],$$

dvs., $\triangle\Phi = 0$ om

$$\frac{d}{du}\left[u\frac{d\Phi}{du}\right] = 0 \Rightarrow u\frac{d\Phi}{du} = c_1 \Rightarrow \Phi = c_1\ln(|u|) + c_2$$

där c_1 och c_2 är integrationskonstanter.

Svar: Den allm. lösningen är $\Phi(u) = c_1\ln(|u|) + c_2$ där $c_{1,2} \in \mathbf{R}$.

7. Stokes' sats $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$ där S är arean i xy-planet som omsluts av C och $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_z\,dx\,dy \Rightarrow$

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C [y^3\,dx + (3x-x^3)\,dy] = \iint_S \underbrace{\left[\frac{\partial(3x-x^3)}{\partial x} - \frac{\partial(y^3)}{\partial y}\right]}_{(\nabla\times\mathbf{A})_z} dx\,dy = $$

$$= \iint_S 3(1-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

som visar att integralen blir maximal om S väljs som $3(1-x^2-y^2) \geq 0$, dvs., C är enhetscirkeln i xy-planet och medelpunkten i origo. Den maximala linjeintegralen är

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} 3(1-x^2-y^2)\,dx\,dy = 3\cdot 2\pi\int_0^1 d\rho\,\rho(1-\rho^2) = \frac{3\pi}{2}.$$

Svar: Kurvan C så att $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ är störst är enhetscirkeln $x^2+y^2=1$, $z=0$.

Den maximala linjeintegralen är $3\pi/2$.