

Lösningförslag till Tentamenskrivning, 2008-08-26, kl. 14.00-19.00
5B1117, matematik III för E och ME (6p)

1. $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$, polära koordinater $\begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \end{cases}$, D övergår

till $D' = \left\{ (r, v) : 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ och $dx dy = r dr dv$ och vi får

$$\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D'} \cos(r^2) r dr dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(r^2) r dr dv = \pi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(r^2) r dr =$$

$$\left[t = r^2, r dr = \frac{dt}{2} \right] = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos t dt = \frac{\pi}{2} [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Svar $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{2}$.

2. Man kan integrera direkt genom att parametrisera varje del av kurvan. Men det är värt att undersöka om det går att byta "integrationsväg" (eller hitta potential)

Punkten (0,0) är singular så vi får inte deformera kurvan över denna, men vi kan t. ex byta till halvcirkelbåge. Oberoende av vägen kräver att fältet skall vara kontinuerligt deriverbar i det området

som innehåller integrationsväg dvs $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Vi får $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$ utanför origo där integrationsvägen

inte passerar. Vi ersätter integrationsväg med halvcirkelbågen $C : x^2 + y^2 = 1, y < 0$ som kan parametriseras $x = \cos t, y = \sin t, t : \pi/2 \rightarrow 3\pi/2$.

Vi får $\int_C \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \int_C \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{[\cos t(-\sin t) + \sin t(\cos t)]}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 0$

Alternativt, kan man finna en potential

$$U = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} \Rightarrow \int_C \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = U(0,1) - U(0,-1) = 0$$

3. Vi använder sfäriska koordinater och Stokes sats. I vårt fall är $\hat{n} = \mathbf{e}_r$: Vi beräknar

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ 1 & r^3 \sin \theta & r^2 \sin \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} (r^2 \sin \theta \mathbf{e}_r + 2r^2 \sin \theta \mathbf{e}_\theta + 3r^3 \sin^3 \theta \mathbf{e}_\varphi).$$

Härav $\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \hat{n} = \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. På den givna ytan är $0 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Och $d\sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Stokes sats ger då

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \hat{n} d\sigma = \iint_\Sigma \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\sigma = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi/2.$$

4. Komplettera S med "botten" $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ så att $S + S_1$ blir rand till halvklotet

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}. \text{ Använd Gauss' sats Använd}$$

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_{\Omega} (z^2 + 2x^2z + 2y^2z) dx dy dz, \text{ sfäriska koordinater}$$

ger

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + 2\pi \int_0^1 2r^5 dr \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{5} \right) \left[\frac{-1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} + 2\pi \left(\frac{1}{3} \right) \left[\frac{1}{4} \sin^4 \theta \right]_0^{\pi/2} = 2\pi \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{12} \right) = 3\pi / 10$$

5.

a) $\operatorname{div}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{r}) = [\operatorname{rot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}] = \operatorname{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{r}$

b) Eftersom fältet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ är källfritt och kontinuerligt deriverbar i hela Ω , så har det en vektorpotential \mathbf{B} och kan skrivas $\mathbf{F} = \operatorname{rot}(\mathbf{B})$. Insättes detta får vi

$$\iiint_{\Omega} (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}) dv = \iiint_{\Omega} (\operatorname{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{r}) dv = [\text{enligt a)}] = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) dv =$$

$$[\text{Gauss sats}] = \iint_S (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma, \text{ där } S \text{ (sfär) är randytan till } \Omega.$$

Nu är $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_r$ på sfären varför

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r) = 0 \text{ på sfären}$$

Svar: $\iiint_{\Omega} (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}) dv = 0$

6. a) $\iint_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} d\sigma$: vi använder Gauss universalsatsen $\iint_{\Sigma} \Phi \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_K \operatorname{grad}(\Phi) dv$ med

$$\Phi = 1 \Rightarrow \operatorname{grad}(\Phi) = \mathbf{0}. \text{ Detta ger att } \iint_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \mathbf{0}$$

b) $\iiint_K \operatorname{div}(\hat{\mathbf{n}}) dv$: här användas Gauss satsen

$$\iiint_K \operatorname{div}(\hat{\mathbf{n}}) dv = \iint_{\Sigma} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\sigma = \iint_{\Sigma} d\sigma = \text{arean av ytan } \Sigma$$

c) $\iint_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}) d\sigma$: här användes Gauss universalsatsen

$$\iint_{\Sigma} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}) d\sigma = -\iint_{\Sigma} (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}}) d\sigma = -\iiint_K \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dv \text{ med } \mathbf{F} = \mathbf{r} \text{ fås}$$

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}) d\sigma = -\iiint_K \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dv = -\iiint_K \underbrace{\operatorname{rot}(\mathbf{r})}_{\mathbf{0}} dv = \mathbf{0}$$

7. Vill använda Gauss' sats. Ytan $S: x^2 + y^2 + 6z^2 = 4, z \geq 0$. är inte sluten. Vi sluter den med

$$S_1 = \{(x, y) : \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \text{ och } S_\varepsilon = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \varepsilon^2\}. \text{ Nu ytan } \Sigma = S \cup S_1 \cup S_\varepsilon$$

Omsluter en kropp K som inte innehåller origo.

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \right) \right] =$$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-\sin 2\theta}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\frac{-\sin 2\theta}{r^2} \right) \right) \right] = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\sin 2\theta}{r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \right) = 0, r \neq 0$$

Gauss' sats ger då för $r \neq 0$

1) Vi beräknar $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$

På $S_1 = \{(x, y) : \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ som ligger i xy -planet är $\theta = \frac{\pi}{2}$ är $\mathbf{F} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{r^2} \mathbf{e}_r, \varepsilon \leq r \leq 2$.

Dvs $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ och $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = 0$.

2) Vi beräknar $\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$

På $S_\varepsilon = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \varepsilon^2\}$ är $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{e}_r, \mathbf{F} = \frac{\cos \theta}{\varepsilon^2} \mathbf{e}_r$, då $r = \varepsilon$.

Vidare är $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\cos \theta}{\varepsilon^2} \mathbf{e}_r \cdot (-\mathbf{e}_r) = -\frac{\cos \theta}{\varepsilon^2}$ och $d\sigma = \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

Vi får $\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = -\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \sin \theta d\theta \right) = -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = -\pi [\sin^2 \theta]_0^{\pi/2} = -\pi$

Svar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma - \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \pi$