KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2008-08-26, kl. 14.00-19.00. 5B1117, matematik III för E och ME (6p)

Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 11, 16 och 22 poäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. *Lösningsförslaget skall textförkaras Bristande läsbarhet medför poängavdrag.*
Hjälpmedel: Medföljande formelblad för matematik III.

3-poängsuppgifter

1.Beräkna $\iint_D \cos\left(x^2+y^2\right)dxdy$, där $D=\left\{(x,y): x>0, x^2+y^2<\dfrac{\pi}{2}\right\}$

2. Beräkna på valfritt sätt linjeintegralen $\int_\Gamma \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, där kurvan Γ startar i punkten(0,1), går därefter vågrätt till (-3,1), sedan lodrätt ned till (-3,-1) och slutligen vågrätt ned till (0,-1)

3. Vektorfältet $\mathbf{F}=\mathbf{e}_r+r^2\sin^2\theta\mathbf{e}_\theta+r\mathbf{e}_\varphi$ är givet i sfäriska koordinater.
Beräkna $\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ är randen till den del av sfären $x^2+y^2+z^2=1$ som ligger i första oktanten$\left(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\right)$. Orientering: moturs sett från punkten$(5,5,5)$

4-poängsuppgifter

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}=\left(xz^2+e^z,\ 2x^2yz,\ y^2z^2+1\right)$
Över ytan $\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\right\}$ med normalriktning uppåt.

5. a) Låt $\mathbf{r}$ vara ortsvektorn i rymden och $\mathbf{B}$ vara en kontinuerligt deriverbart vektorfält i rymden. Visa att $div\left(\mathbf{B}\times\mathbf{r}\right)=rot\left(\mathbf{B}\right)\bullet\mathbf{r}$
b) Låt $\Omega=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$ och vektorfältet$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vara källfritt och kontinuerligt deriverbar i hela Ω. Beräkna$\oiiint_\Omega (\mathbf{F}(\mathbf{r})\bullet\mathbf{r})dv$.

6. Σ är randytan till en kropp K med utåtriktad enhetsnormelen $\hat{\mathbf{n}}$ och $\mathbf{r}=(x,y,z)$ är ortsvektorn i rymden. Beräkna (tex med varianter av Gauss´sats) följande uttryck:
$\oiint_\Sigma \hat{\mathbf{n}}d\sigma, \iiint_K div\left(\hat{\mathbf{n}}\right)dv, \oiint_\Sigma (\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{n}})d\sigma$.

7. Vektorfältet $\mathbf{F}=\dfrac{\cos\theta}{r^2}\mathbf{e}_r$ är given i sfäriska koordinater.
Bestäm flödet av $\mathbf{F}$ genom ytan $x^2+y^2+6z^2=4$ $,z\geq 0$. Normalen pekar utåt sett från origo.

Lycka till.