

**Lösningsförslag till tentamen skrivning i 5B1117  
Matematik III för E och ME, 2009-01-09**

1.

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbf{K}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dy \int_0^{2y^2} dx \int_0^x dz z = \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{2y^2} dx \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^x = \int_0^1 dy \int_0^{2y^2} dx \frac{1}{2} x^2 = \\ &= \int_0^1 dy \left[ \frac{1}{6} x^3 \right]_0^{2y^2} = \int_0^1 dy \frac{1}{6} 2^3 y^6 = \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{7} y^7 \right]_0^1 = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

Svar: Integralen är lika med  $\frac{4}{21}$ .

2. Detta kan visas genom att använda Greens formel

$$\iint_S \left( \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \right) dx dy = \oint_C (P dx + Q dy)$$

med  $Q = x/2$  och  $P = -y/2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_C (-y dx + x dy) &= \frac{1}{2} \iint_S dx dy \left( \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) = \\ &= \iint_S dx dy = \text{Arean av } S. \end{aligned}$$

Obs. att beviset inte bara gäller för  $S$  ovan utan för ett godtyckligt område  $S$  som omsluts av en enkel, sluten kurva  $C$ .

3. Variabelsubstitutionen:  $u = 3x$ ,  $v = 2y$  och  $w = z$  ger  $9x^2 + 4y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$ ,  $dx dy dz = (du/3)(dv/2)(dw) = dudvdw/6$ , och integrationsområdet blir  $-\infty < u, v, w < \infty$ .  $\Rightarrow$  Integralen är lika med

$$\iint_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{6} \frac{1}{(u^2 + v^2 + w^2)} e^{-(u^2 + v^2 + w^2)} dudvdw.$$

Med sfäriska koordinater,  $u = r \sin(\theta) \cos(\phi)$ ,  $v = r \sin(\theta) \sin(\phi)$ ,  $w = r \cos(\theta)$ , blir  $u^2 + v^2 + w^2 = r^2$ ,  $dudvdw = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$ , och integrationsområdet  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , och  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .  $\Rightarrow$  Integralen är lika med

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} e^{-r^2} d\phi &= \frac{1}{6} 4\pi \int_0^\infty dr e^{-r^2} = \\ &= [\text{Ledningen}] = \frac{2\pi}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi^{3/2}}{3}. \end{aligned}$$

*Alternativlösning:* Variabelbyten  $x = r \sin(\theta) \cos(\phi)/3$ ,  $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)/2$ ,  $z = r \cos(\theta)$ , ger

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

osv. (som måste beräknas för att få full poäng) och ger

$$dxdydz = \left| \frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \phi)} \right| drd\theta d\phi = \frac{1}{6} r^2 \sin(\theta) drd\theta d\phi$$

osv., som ger direkt  $(r, \theta, \phi)$ -integralen ovan.

Svar: Integralen är lika med  $\pi^{3/2}/3$ .

4. Ytan kan, t.ex., parameteriseras genom

$$\begin{aligned} x &= u \cos(v) \\ y &= u \sin(v) \\ z &= 1 - u \cos(v) \end{aligned}$$

där  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ .  $\Rightarrow (\mathbf{r} = (x, y, z))$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \cos(v) & \sin(v) & -\cos(v) \\ -u \sin(v) & u \cos(v) & u \sin(v) \end{vmatrix} = (u, 0, u)$$

ger

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(u, 0, u)}{\sqrt{u^2 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

(obs. att  $u \geq 0$ ).

Arean kan beräknas genom  $\iint_{\mathbf{D}} dS$  där (med parameterframställningen osv. ovan),

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv = |(u, 0, u)| dudv = \sqrt{2}u dudv$$

och  $\mathbf{D}$  definierad genom  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ .  $\Rightarrow$

$$\text{Arean} = \iint_{\mathbf{D}} dS = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \sqrt{2}u = (2\pi) \sqrt{2} \int_0^1 du u = \pi\sqrt{2}.$$

Svar: (a)  $\hat{\mathbf{n}} = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$ .<sup>1</sup> (b) Arean av  $S$  är  $\pi\sqrt{2}$ .

5. Ansatsen  $\mathbf{A} = \text{grad}\Phi$  ger

$$A_r = r \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (1)$$

$$A_\theta = r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (2)$$

$$A_\phi = -r \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}. \quad (3)$$

Ekv. (??) ovan ger ( $h_r = 1$ ),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = r \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + C_1(\theta, \phi) \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Obs. att orienteringen är ospecificerad, och därför är svaret  $\hat{\mathbf{n}} = -(1, 0, 1)/\sqrt{2}$  lika bra.

där  $C_1$  är oberoende av  $r$ . Det och Ekv. (??) ovan ger ( $h_\theta = r$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{2} r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + C_1(\theta, \phi) \right) = \\ &= r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial C_1(\theta, \phi)}{\partial \theta} = r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) \end{aligned}$$

dvs.,

$$\frac{\partial C_1(\theta, \phi)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow C_1(\theta, \phi) = C_2(\phi)$$

där  $C_2$  är oberoende av  $r$  och  $\theta$ . Detta, Ekv. (??) och (??) ovan ger<sup>2</sup> ( $h_\phi = r \sin(\theta)$ ),

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} &= \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{2} r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + C_2(\phi) \right) = \\ &= -r \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{dC_2(\phi)}{d\phi} = -r \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi), \end{aligned}$$

dvs.,

$$\frac{dC_2(\phi)}{d\phi} = 0 \Rightarrow C_2(\phi) = C \text{ (konstant).}$$

Det visar att  $\mathbf{A} = \text{grad}\Phi$  där

$$\Phi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)$$

(obs.  $C$  ovan var godtycklig, och vi satte  $C = 0$ ).

(b) Obs. att  $\Phi$  ovan i kartesiska koordinater är lika med  $\Phi = x^2/2$ , och med  $P = (0, 0, 0)$  och  $Q = (2, 0, 0)$ ,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(Q) - \Phi(P) = 2^2/2 - 0 = 2.$$

*Anmärkning:* Det finns många olika sätt att lösa uppgiften. T.ex. kan man lösa (a) genom att beräkna  $\text{rot}\mathbf{A}$ , som ger  $\text{rot}\mathbf{A} = (0, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{A}$  har skalär potential, eller (b) genom att bestämma en parameterframställning av linjen  $\Gamma$  i någon typ av koordinater men det kan bli ganska mycket job. Man kan också lösa uppgiften genom att visa att  $\mathbf{A}$  i kartesiska koordinater är lika med  $\mathbf{A} = x\mathbf{e}_x = (x, 0, 0)$  (genom att stoppa in  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ ), som gör resten av uppgiften nästan trivial.

6. (a)

$$\begin{aligned} \text{Flödet} &= \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbf{K}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dx dy dz = \\ &= \iiint_{\mathbf{K}} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} 2x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} (z + x) \right)}_{4x+2} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{y^2+z^2 \leq 1} dy dz (4x + 2) = \\ &= \int_0^1 dx (4x + 2)\pi = \pi [2x^2 + 2x]_0^1 = 4\pi. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>obs. att vi nu kan skriva  $dC_2/d\phi$  därför att  $C_2$  är en envariabelfunktion

(b)

$$\text{Flödet} = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

där

$$S_1 : x = 0, \quad y^2 + z^2 \leq 1, \quad d\mathbf{S} = (-1, 0, 0)dydz$$
$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{y^2+z^2 \leq 1} (0, y, z) \cdot (-1, 0, 0)dydz = 0;$$

$$S_2 : x = 1, \quad y^2 + z^2 \leq 1, \quad d\mathbf{S} = (1, 0, 0)dydz$$
$$\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{y^2+z^2 \leq 1} (2, y, z+1) \cdot (1, 0, 0)dydz =$$
$$= 2 \int_{y^2+z^2 \leq 1} dydz = 2\pi;$$

$$S_3 : 0 \leq x \leq 1, \quad y = \cos(u), \quad z = \sin(u), \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$
$$d\mathbf{S} = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} dxdu = \pm (0, \cos(u), \sin(u))dxdu,$$

$\hat{\mathbf{n}}$  utåt  $\Rightarrow d\mathbf{S} = +(0, \cos(u), \sin(u))dxdu$ , och

$$\iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq u \leq 2\pi}} (2x^2, \cos(u), \sin(u) + x) \cdot (0, \cos(u), \sin(u))dxdu =$$
$$= \int_0^{2\pi} du \int_0^1 dx(1 + x \sin(u)) = 2\pi.$$

$\Rightarrow$

$$\text{Flödet} = 0 + 2\pi + 2\pi = 4\pi.$$

7.  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  och ledningen ger

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \quad \Rightarrow -x = -\frac{\partial}{\partial z} A_y \quad (5)$$

$$B_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \quad \Rightarrow 0 = 0 \text{ (o.k.)} \quad (6)$$

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \quad \Rightarrow 2x + z = \frac{\partial}{\partial x} A_y. \quad (7)$$

Ekv. (??) ger  $A_y(\mathbf{r}) = xz + C_1(x, y)$ , och med (??),

$$2x + z = \frac{\partial}{\partial x} (xz + C_1(x, y)) = z + \frac{\partial}{\partial x} C_1(x, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} C_1(x, y) = 2x$$

som ger  $C_1(x, y) = x^2$ , t.ex. (vi sätter integrationkonstanten till 0 därför att vi bara behöver en vektorpotential). Detta visar att  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, xz + x^2, 0)$  är ett vektorpotential till  $\mathbf{B}$ .

Med  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  och Stokes' sats,

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

som visar att flödesintegralen ovan bara beror på randen  $C$  till  $S$  (orienteringen är enligt högerhandsregeln).

Om  $S : z = 1 + (x^2 + y^2 - 1)^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$  så är randen till  $S$   $C : x^2 + y^2 = 1$ , och  $C$  kan parameteriseras genom  $x = \cos(u)$ ,  $y = \sin(u)$ ,  $z = 1$ , och  $0 \leq u \leq 2\pi$ . Högerhandsregeln ger  $u : 0 \rightarrow 2\pi$  (moturs), motsvarande  $\hat{\mathbf{n}}$  uppåt. Flödesintegralen blir därför,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_C (0, xz + x^2, 0) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (x(u)z(u) + x(u)^2) \frac{dy(u)}{du} du = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(u) + \cos^2(u)(-\cos(u))) du = - \int_0^{2\pi} [\cos^2(u) + \cos^3(u)] du = \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du = -\pi \end{aligned}$$

därför att  $\int_0^{2\pi} \cos^3(u) du = 0$  [som visas genom symmetribetraktelser, t.ex.,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^3(u) du &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3(u) du \quad [\text{p.g.a. periodiciteten av } \cos] \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3(t - \pi) dt \quad [\text{variabelbyte: } u = t - \pi] \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos^3(t) dt \quad [\cos(t - \pi) = -\cos(t)] \end{aligned}$$

som visar att  $\int_0^{2\pi} \cos^3(u) du = - \int_0^{2\pi} \cos^3(u) du$ ].