KTH Matematik

Tentamenskrivning i 5B1117 Matematik III för E och ME, 2009-01-09, kl. 08.00-13.00

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 11, 16 respektive 22 poäng.
OBS! Eventuella bonuspoäng från tidigare gäller ej.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Hjälpmedel: medföljande formelblad i vektoranalys.

---

1. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_{\mathbf{K}} z\,dx\,dy\,dz$$
där **K** definieras genom $0 \le z \le x$, $0 \le x \le 2y^2$ och $0 \le y \le 1$. (3 p)

2. Låt C vara kurva som omsluter ellipsen $S : (x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1$ ($a, b > 0$ är parameter), med riktningen moturs. Visa att kurvintegralen $\frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$ är lika med arean av S. (3 p)

3. Beräkna trippelintegralen ($\mathbf{R}^3$ är hela rummet, $-\infty < x, y, z < \infty$),
$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{(9x^2 + 4y^2 + z^2)}\, e^{-(9x^2+4y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz. \qquad (4p)$$
Ledning: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

4. En yta S definieras genom $z = 1 - x$ och $x^2 + y^2 \le 1$.
Beräkna arean av S. (3 p)

5. Ett vektorfält definieras genom (i sfäriska koordinater),
$$\mathbf{A} = r\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)\mathbf{e}_r + r\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\phi)\mathbf{e}_\theta - r\sin(\theta)\cos(\phi)\sin(\phi)\mathbf{e}_\phi.$$
(a) Visa att **A** har en skalarpotential. (2 p)

(b) Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där Γ är raka linjen med startpunkten i origo $(0, 0, 0)$ och slutpunkten $(2, 0, 0)$. (2 p)

Var god vänd

6. Beräkna flödet

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

av vektorfältet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (2x^2, y, z + x)$$

ut ur den slutna yta S som bildar begränsnigsyta till kroppen

$$\mathbf{K} : 0 \le x \le 1, \quad y^2 + z^2 \le 1$$

på två olika sätt:

(a) med hjälp av Gauss' sats, (2 p)

(b) direkt. (2 p)

7. (a) Visa att (beloppet av) flödesintegralen $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, $\mathbf{B} = (-x, 0, 2x + z)$, bara beror på kurvan C som är randen till S. (2 p)

(b) Beräkna $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, $\mathbf{B} = (-x, 0, 2x + z)$, där S definieras genom

$$z = 1 + (x^2 + y^2 - 1)^2, \quad x^2 + y^2 \le 1;$$

orienteringen är sådan att $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_z \ge 0$. (2 p)

Ledning: Visa att $\mathbf{B}$ har en vektorpotential $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, och $\mathbf{A}$ kan beräknas med ansatsen $\mathbf{A} = (0, A_y, 0)$.