Institutionen för matematik
KTH

**Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret matematik för Media 1 och IT1, 5B1118, måndagen den 16 januari 2006 klockan 14.00-19.00.**

1. (3p) Lös ekvationen $7x - 32 = 25$ i ringen $Z_{43}$.

   **Lösning:** Då $7 \cdot 6 = 42 = -1$ i ringen $Z_{43}$ gäller att $7 \cdot (-6) = 1$ i denna ring. Alltså $7^{-1} = -6 = 37$.

   $$7x \equiv_{43} 25 + 32 \;\Leftrightarrow\; 7x \equiv_{43} 57 \;\Leftrightarrow\; 7x \equiv_{43} 14 \;\Leftrightarrow\; x \equiv_{43} (-6) \cdot 14 \equiv_{43} -84 \equiv_{43} 2$$

   **Svar:** $x = 2$.

2. (3p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att formeln

   $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

   är giltig för alla naturliga tal $n \geq 1$.

   **Lösning:** $VL_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ och $HL_1 = 1^2 = 1$. Alltså är påståendet sant för $n = 1$.
   Visar nu att påståendet

   $$VL_n = HL_n \;\Rightarrow\; VL_{n+1} = HL_{n+1}$$

   är giltigt för alla naturliga tal $n \geq 1$.

   $$VL_{n+1} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = \{\text{om } VL_n = HL_n\} =$$

   $$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 = HL_{n+1}.$$

   Enligt induktionsprincipen gäller nu det givna påståendet för alla naturliga tal $n \geq 1$.

3. (3p) Femton olika julklappar skall fördelas mellan tre barn så att det äldsta barnet får sju julklappar, det yngsta barnet får tre julklappar och det tredje barnet de återstående julklapparna. På hur många sätt kan detta ske. Svaret skall ges i formen av ett heltal.

   **Lösning:** De femton julklapparna delas in i tre etiketterade högar, varav en med 7 klappar en med 5 klappar och en med 3 klappar. Svaret ges då av en multinomialkoefficient.

   **Svar:**

   $$\binom{15}{7,5,3} = \frac{15!}{7!5!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{120 \cdot 6} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 4 = 360360$$

4. Betrakta den multiplikativa grupp $G$ som består av de inverterbara elementen i ringen $Z_{10}$. Skriv ner en multiplikationstabell till $G$. Använd också tabellen du fick för att beräkna produkten av alla element i $G$.Förklara också utifrån tabellens struktur varför man lätt kan se att gruppen är abelsk.

**Lösning:** Ett element i denna ring är inverterbart precis då det saknar annan gemensamma delare med 10 än $\pm 1$, så $G = \{1, 3, 7, 9\}$

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & 1 & 3 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 9 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & 1 & 9 & 3 \\ 9 & 9 & 7 & 3 & 1 \end{array}.$$

**Svar:** $1 \circ 3 \circ 7 \circ 9 = 3 \circ 7 \circ 9 = 1 \circ 9 = 9$.

Eftersom tabellen är symmetrisk kring huvuddiangonalen är gruppen abelsk.

5. Låt $G$ beteckna gruppen $G = (Z_6, +) \times (Z_6, +)$.

   (a) (1p) Ange en delgrupp till $G$ med tre element.

   **Svar:** $H = \{(0, 0), (2, 0), (4, 0)\}$

   (b) (1p) Har $G$ någon delgrupp med 15 element. Motivera ditt svar.

   **Svar:** Nej, ty antalet element i $G$ är $|(Z_6, +)| \cdot |(Z_6, +)| = 6 \cdot 6 = 36$. Enligt Lagranges sats gäller då för varje delgrupp $H$ till $G$ att $|H|$ delar 36. Men talet 15 delar inte talet 36 så en delgrupp med 15 element är utesluten.

   (c) (1p) Har $G$ något element av ordning 12? Motivera ditt svar.

   **Svar:** Nej, ty för varje element $a$ i $(Z_6, +)$ gäller att $a^6 = id$. Med operationen i $G$ skriven multiplikativt gäller nu för varje element $(a, b) \in G$ att

   $$(a, b)^6 = (a^6, b^6) = (id, id).$$

   Det gäller alltså att talet $k = 12$ aldrig är det minsta heltal för vilket $a^k = id$ i $G$.

6. En 1-felsrättande kod $C$ har kontrollmatrisen

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (1p) Ange antalet ord i $C$.

   **Svar:** $2^{\text{antal kolonner}-\text{antal rader}} = 2^{6-3} = 8$.

   (b) (1p) Ange ett kodord $\bar{c}$ som inte är nollordet, dvs $\bar{c} \in C$ och $\bar{c} \neq 000000$.

   **Svar:** $\bar{c} = (0\,0\,1\,1\,1\,1)$ ty $H(0\,0\,1\,1\,1\,1)^T = (0\,0\,0\,0\,0\,0)^T$.

   (c) (1p) Ordet 111111 tillhör inte $C$. Undersök om ordet går att rätta och rätta det i så fall.

   **Svar:** Vi finner att $H(1\,1\,1\,1\,1\,1)^T = (0\,1\,0)^T$. Den kolonnen finns inte med bland kolonnerna i kontrollmatrisen så det ordet går inte att rätta.

7. (5p) Betrakta den Booleska funktionen

$$f(x, y, z, w) = \overline{zw + xy}$$

Bestäm en minimal disjunktiv form för $f(x, y, z, w)$.

**Lösning:** Den Booleska funktionen $g(x, y, z, w) = zw + xy$ kan beskrivas med hjälp av Karnaughdiagrammet nedan.

| | $xy$ | $x\bar{y}$ | $\bar{x}\bar{y}$ | $\bar{x}y$ |
|---|---|---|---|---|
| $zw$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $z\bar{w}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\bar{z}\bar{w}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\bar{z}w$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

Funktionen $f$ är komplementet till denna funktion och har således Karnaughdiagrammet

| | $xy$ | $x\bar{y}$ | $\bar{x}\bar{y}$ | $\bar{x}y$ |
|---|---|---|---|---|
| $zw$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $z\bar{w}$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{z}\bar{w}$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{z}w$ | 0 | 1 | 1 | 1 |

Vi täcker nu över ettorna ovan med så få och så stora rektanglar, med 1, 2, 4 eller 8 rutor, som möjligt. Beskriver vi motsvarande funktioner får vi

**Svar:** $f(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{w} + \bar{w}\bar{x} + \bar{z}\bar{y}$.

8. Tio identiska äpplen och tio identiska päron skall fördelas bland fyra olika pojkar. På hur många olika sätt kan detta ske om

(a) (1p) Varje pojke får lika många päron som äpplen.

**Lösning:** Antalet sätt att fördela 10 identiska objekt i fyra olika lådor är enligt känd formel

$$\binom{10+3}{3}.$$

Vi betraktar äpplena som de identiska objekten och de fyra olika pojkarna som de fyra olika lådorna. Vi observerar att när vi väl fördelat äpplena vet vi precis hur många päron varje pojke skall ha. Så det finns då bara ett sätt att fördela pärona på.

**Svar:**

$$\binom{10+3}{3}.$$

(b) (2p) Varje pojke får minst ett äpple och en av pojkarna får alla päron.

**Lösning:** Vi väljer först ut den pojke som skall ha alla päron. Antalet sätt är $n_1 = 4$. Sen ger vi varje pojke ett första äpple. Antalet sätt att göra detta på är $n_2 = 1$. Tillslut fördelar vi de återstående sex äpplena. Detta kan göras på

$$n_3 = \binom{6+3}{3}$$

olika sätt. Multiplikationsprincipen ger nu

**Svar:**

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 4 \cdot 1 \cdot \binom{6+3}{3}.$$

(c) (2p) Inga restriktioner finns.

**Lösning:** Totala antalet sätt att fördela äpplena respektive pärona på är respektive

$$\binom{10+3}{3}.$$

Enligt multiplikationsprincipen får vi då svaret

**Svar:**

$$\binom{10+3}{3}^2.$$

9. (5p) Ett löv i ett träd är en nod med valensen (dvs graden) ett. Ett givet träd $T$ har 113 noder med valensen 2, 38 noder med valensen 3 och 15 noder med valensen 4. Resterande noder är löv. Bestäm antalet löv.

**Lösning:** Låt $v_1$ beteckna antalet noder med valens ett och låt $e$ beteckna antalet kanter.

Vi vet att valenssumman är två gånger antalet kanter och vi vet att antal noder i ett träd är ett mer än antalet kanter. Detta ger nu

$$v_1 + 113 \cdot 2 + 38 \cdot 3 + 15 \cdot 4 = 2e \quad \text{och} \quad v_1 + 113 + 38 + 15 = e + 1.$$

Subtraherar vi nu de bägge ekvationerna får vi att

$$113 \cdot 1 + 38 \cdot 2 + 15 \cdot 3 = 2e - (e+1) = e - 1.$$

Detta ger omedelbart att $e = 235$. Från ovan får vi då också att

**Svar:** Antalet löv är $v_1 = e + 1 - (113 + 38 + 15) = 70$.

10. (5p) Betrakta gruppen $S_4$ som består av alla permutationer på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$. Bestäm tre olika delgrupper $H_1$, $H_2$ och $H_3$ till $S_4$, samtliga innehållande åtta element vardera, dvs $|H_1| = 8$, $|H_2| = 8$ och $|H_3| = 8$. (Du får två delpoäng om du hittar en delgrupp med åtta element och sammanlagt fyra delpoäng om du hittar två olika delgrupper med vardera åtta element.)

**Lösning:** Lite trial and error och kunskapen att varje element i de sökta grupperna har ordningarna 1, 2 eller 4 ger oss grupperna

$$H_1 = \{\varphi = (1\ 2\ 3\ 4), \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4 = id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3), (2\ 4)\}.$$
$$H_2 = \{\varphi = (1\ 3\ 2\ 4), \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4 = id, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2), (3\ 4)\}.$$
$$H_3 = \{\varphi = (1\ 2\ 4\ 3), \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4 = id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4), (2\ 3)\}.$$

**Anmärkning** Man kan se dessa grupper som de stela vridningar av en kvadrat med hörnen 1, 2, 3 och 4 (i någon lämplig ordning) som vrider kvadraten på sig själv.