KTH Matematik
B.Ek

Lösningar tentan i DISKRET MATEMATIK för CL 22 maj 2006

Tryckfel kan förekomma.

1) Vi söker alla heltalslösningar x, y till ekvationen $247x + 156y = 39$.

Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 247 &= 1\cdot 156 + 91, &\quad \text{och} \quad 13 &= 65 - 2\cdot 26 = 65 - 2(91 - 1\cdot 65) = \\ 156 &= 1\cdot 91 + 65, & &= -2\cdot 91 + 3\cdot 65 = -2\cdot 91 + 3(156 - 1\cdot 91) = \\ 91 &= 1\cdot 65 + 26, & &= 3\cdot 156 - 5\cdot 91 = 3\cdot 156 - 5(247 - 1\cdot 156) = \\ 65 &= 2\cdot 26 + 13, & &= -5\cdot 247 + 8\cdot 156, \\ 26 &= 2\cdot 13 + 0 & & \end{aligned}$$

så $\text{sgd}(247, 156) = 13$. Man finner $247 = 19\cdot 13, 156 = 12\cdot 13$ och eftersom HL $39 = 3\cdot 13$ är ekvationen lösbar och ekvivalent med $19x + 12y = 3$. Division med 13 av uttrycket ovan ger $1 = -5\cdot 19 + 8\cdot 12$, så $19(-15) + 12\cdot 24 = 3$.

Då detta dras från ekvationen fås den ekvivalenta $19(x+15)+12(y-24) = 0$, dvs $19(x+15) = -12(y-24)$. Båda leden är delbara med 12 och med 19, alltså med $12\cdot 19$, och kan skrivas $12\cdot 19a$ för något heltal a. Detta ger också för varje heltal a en lösning till ekvationen, så alla lösningar ges av $x = -15 + 12a, y = 24 - 19a$, dvs (med $b = a - 1$)

svar: $\begin{cases} \boldsymbol{x = -3 + 12b,} \\ \boldsymbol{y = 5 - 19b,} \end{cases}$ ***b* godtyckligt heltal.**

2) Vi söker antalet sätt att fördela 11 särskiljbara bilar bland 16 platser och samtidigt 4 särskiljbara motorcyklar bland 8 platser.

11 bilar kan fördelas på 16 platser på $(16)_{11} = 16\cdot 15\cdot 14\cdot \cdots \cdot 6 = \frac{16!}{5!}$ sätt (=antalet injektioner från en 11-mängd till en 16-mängd).

4 motorcyklar kan p.s.s. fördelas på 8 platser på $(8)_4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = \frac{8!}{4!}$ sätt.

Tillsammans kan de (multiplikationsprincipen) fördelas på

svar: $\boldsymbol{\frac{16!}{5!}\cdot\frac{8!}{4!}}$ **(= 292919058432000) sätt.**

3) G kan färgas med högst k färger på $P_G(k)$ sätt. På hur många sätt med exakt 5 färger?

Låt X vara mängden av färgningar med 5 givna färger (så $|X| = P_G(5)$) och $A_i, i = 1, 2, \ldots, 5$ mängden av färgningar med de 5 färgerna som inte använder färg nr i (så $|A_i| = P_G(4)$). Färgningarna som använder alla 5 färgerna är då de som ligger i X men inte i någon av A_i:na.

Det sökta antalet fås med sållprincipen:

$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_5)| = |X| - (|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_5|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_4 \cap A_5|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_3 \cap A_4 \cap A_5|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| + \cdots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

Antalet termer $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$ med j olika A_i:n är $\binom{5}{j}$ och var och en av dem är antalet färgningar med högst $5 - j$ färger, dvs $P_G(5 - j)$, så antalet är

$P_G(5) - \binom{5}{1}P_G(4) + \binom{5}{2}P_G(3) - \binom{5}{3}P_G(2) + \binom{5}{4}P_G(1) - \binom{5}{5}P_G(0)$, dvs

Svar: $\boldsymbol{P_G(5) - 5P_G(4) + 10P_G(3) - 10P_G(2) + 5P_G(1) - P_G(0)}$

4) $\alpha \in S_9$ ges av $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 7, \alpha(3) = 1, \alpha(4) = 9, \alpha(5) = 8, \alpha(6) = 5, \alpha(7) = 4, \alpha(8) = 6, \alpha(9) = 2$. Vi söker dels cykelformen för α, dels σ så att $\sigma\alpha = \alpha^{-1}\sigma$.

$\alpha(1) = 3, \alpha(3) = 1$ ger en cykel $(1\,3)$, $\alpha(2) = 7, \alpha(7) = 4, \alpha(4) = 9, \alpha(9) = 2$ ger en cykel $(2\,7\,4\,9)$ och $\alpha(5) = 8, \alpha(8) = 6, \alpha(6) = 5$ ger en cykel $(5\,8\,6)$. Totalt $\alpha = (1\,3)(2\,7\,4\,9)(5\,8\,6)$ och därur $\alpha^{-1} = (3\,1)(9\,4\,7\,2)(6\,8\,5)$.

Att $\sigma\alpha = \alpha^{-1}\sigma$ är ekvivalent med $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \alpha^{-1}$, vilket är uppfyllt omm det för alla $x_1, x_2 \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ gäller att $\alpha(x_1) = x_2$ precis om $\alpha^{-1}(\sigma(x_1)) = \sigma(x_2)$.

Eftersom α och α^{-1} har samma cykelstruktur finns ett sådant σ. Vi kan t.ex. välja $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 9, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 7, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 5, \sigma(7) = 4, \sigma(8) = 8, \sigma(9) = 2$, dvs i cykelform $\sigma = (1\,3)(2\,9)(4\,7)(5\,6)$.

Svar: $\boldsymbol{\alpha = (1\,3)(2\,7\,4\,9)(5\,8\,6)}$ **och (t.ex.)** $\boldsymbol{\sigma = (1\,3)(2\,9)(4\,7)(5\,6)}$

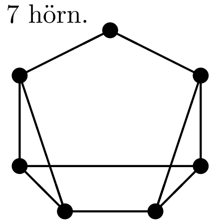
5) Vi skall visa att $221(= 13 \cdot 17) \mid 13n^{17} + 17n^{13} + 191n$ för alla heltal n.
Eftersom 13 och 17 är primtal, följer det ur Fermats lilla sats att
$13 \mid n^{13} - n, 17 \mid n^{17} - n$. Låt $n^{13} - n = 13a, n^{17} - n = 17b$ med a, b heltal. Då fås $13n^{17}+17n^{13}+191n = 13(n^{17}-n)+17(n^{13}-n)+(191+13+17)n = 13\cdot17b+17\cdot13a+221n = 221(a+b+n)$ och **saken är klar.**

6) Med $A_4 = \{\pi \in S_4 \mid \mathrm{sgn}(\pi) = 1\}$ skall vi avgöra om A_4 har delgrupper av ordningarna 3 och 5.
Eftersom $|S_n| = n!$ och hälften av alla permutationer i S_n är jämna då $n \geq 2$, är $|A_4|$, antalet element i A_4, $\frac{4!}{2} = 12$.
Eftersom $5 \nmid 12$ har A_4 ingen delgrupp av ordning 5.
En delgrupp av ordning 3 måste vara cyklisk (en grupp av primtalsordning), så den genereras av ett element av ordning 3. $(1\,2\,3) = (1\,3)(1\,2) \in A_4$ (en produkt av ett jämnt antal transpositioner) så den genererar en delgrupp till A_4 : $\{(1), (1\,2\,3), (1\,2\,3)^2 = (1\,3\,2)\}$ av ordning 3.
Svar: A_4 har (minst) en delgrupp av ordning 3, men ingen av ordning 5.

7) Vi har kontrollmatrisen $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och mottagna (110111), (100010), (100101).

Om H multipliceras med de mottagna orden (som kolonnvektorer) fås
$H\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $H\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $H\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, dvs H:s fjärde kolonn, H:s tredje kolonn och nollkolonnen. Fel har alltså inträffat i fjärde, tredje och ingen position(erna).
Svar: De sända orden var 110011, 101010 och 100101.

8a) Vi undersöker om följande är möjliga valenslistor för en graf med 7 hörn.
i) 0,2,3,3,4,4,5 : **omöjlig**, ty summan av valenserna skall vara 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal.
ii) 2,3,3,3,3,3,3 : **möjlig**, se figuren till höger.
iii) 2,2,3,5,5,5,6 : **omöjlig**, ty de tre första hörnen kan ha högst 7 kanter till de sista fyra, men dessa måste ha minst 9 kanter till de första tre (minst 2,2,2,3 "utåt").



Svar: Det finns en graf med valenserna i ii), men ingen med dem i i) eller iii).

b) Grafen G med 15 hörn är eulersk och $\overline{G}$, G:s komplementgraf, är sammanhängande. Vi skall visa att $\overline{G}$ är eulersk.
Enligt en känd sats är en graf eulersk omm den är sammanhängande (bortsett från eventuella isolerade hörn) och antalet udda hörn är högst 2. Men om hörnet v i G har valens $\delta(v)$, har v i $\overline{G}$ valens $14 - \delta(v)$ (v:s grannar i $\overline{G}$ är precis de av de 14 andra hörnen som inte är grannar till v i G), så v är udda i G omm det är udda i $\overline{G}$. Eftersom $\overline{G}$ är sammanhängande och antalet udda hörn i G är högst 2, är villkoret för att $\overline{G}$ skall vara eulersk uppfyllt och **saken är klar**.