KTH Matematik
B.Ek

Lösningar tentan i DISKRET MATEMATIK för CL 23 augusti 2006

Tryckfel kan förekomma.

1) Om det gällde att $\log_4 12 = \frac{m}{n}$, med $m, n \in \mathbb{Z}$, skulle $4^{\frac{m}{n}} = 12$, dvs $4^m = 12^n$, så $2^{2m} = 2^{2n}3^n$. Eftersom primfaktorisering av heltal är (väsentligen) unik och primfaktorn 3 finns i potens 0 i vl och n i hl, skulle det ge $n = 0$. Men n måste vara > 0, motsägelse, så $\mathbf{\log_4 12}$ **är irrationellt.**

2) Antalet sätt att fördela 74 identiska båtar på tre barn, så att var och en får minst 2 st är detsamma som antalet sätt att fördela $68 (= 74 - 2 \cdot 3)$ st bland dem, dvs (oordnat med upprepning) $\binom{\mathbf{68+(3-1)}}{\mathbf{3-1}} = \binom{\mathbf{70}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{70 \cdot 69}}{\mathbf{2}}$**(= 2415) sätt**.
Antalet sätt att fördela 6 olika klubbor, så att ingen blir utan, kan fås med stirlingtal (antalet surjektioner från en 6-mängd (klubborna) på en 3-mängd (barnen) $= 3!S(6,3) = 6 \cdot 90 = 540$ (som på sid. 127,129 i boken)) **eller** med sållprincipen (alla fördelningar ($3^6 = 729$ st) $-$ antalet där någon blir utan ($3 \cdot 2^6 - 3 \cdot 1^6 = 189$ st)), åter $729 - 189 =$ **540 sätt**.
Totala antalet fördelningar ges enligt multiplikationsprincipen av produkten av dessa, dvs **Svar:** $\frac{\mathbf{70 \cdot 69}}{\mathbf{2}} \cdot$ **540(= 1304100) sätt.**

3) Om inget av talen $2^1 - 1, 2^2 - 1, \ldots, 2^m - 1$ vore delbart med m, skulle enligt postfacksprincipen minst två av dem, $2^s - 1$ och $2^t - 1$ med $1 \leq s < t \leq m$ säg, ge samma rest vid division med m (de möjliga resterna $1, 2, \ldots, m-1$ är postfacken, de m st talen är breven). Det skulle medföra att $m \mid (2^t - 1) - (2^s - 1) = 2^t - 2^s = 2^s(2^{t-s} - 1)$. Men m är ett udda tal, så det gåve att $m \mid 2^{t-s} - 1$ och eftersom $1 \leq t - s < m$ motsäger det antagandet, så **saken är klar.**

4a) Vi har $\alpha(1) = \beta(5) = 2$, $\alpha(2) = \beta(6) = 3$, $\alpha(3) = \beta(3) = 1$, $\alpha(4) = \beta(8) = 5$, $\alpha(5) = \beta(9) = 6$, $\alpha(6) = \beta(7) = 7$, $\alpha(7) = \beta(1) = 4$, $\alpha(8) = \beta(4) = 9$, $\alpha(9) = \beta(2) = 8$.
$\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 1$ ger en cykel (123) för α. P.s.s. finner man $\alpha = (123)(4567)(89)$ och $\beta = (14963)(285)$. Sammansättning (först β sedan α) ger $(\alpha\beta)(1) = \alpha(\beta(1)) = \alpha(4) = 5$ osv, så $\alpha\beta = (153297486)$. **Svar:** $\boldsymbol{\alpha = (123)(4567)(89)}$, $\boldsymbol{\beta = (14963)(285)}$, $\boldsymbol{\alpha\beta = (153297486)}$.
b) G är en grupp som innehåller α och β och således också $\alpha\beta$. Ordningen för en grupp är en multipel av ordningen för varje element (följer ur Lagranges sats, sid. 275 i boken) och ordningen för en permutation är det minsta positiva heltalet som är en multipel av cykellängderna, dvs deras minsta gemensamma multipel. Vi ser att ordningarna för $\alpha, \beta, \alpha\beta$ är $\text{mgm}(3,4,2) = 12$, $\text{mgm}(5,3,1) = 15$, $\text{mgm}(9) = 9$. $|G|$ är delbar med alla tre, dvs med $\text{mgm}(12, 15, 9) = 180$, **saken är klar.**

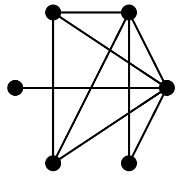
5) Vi skall lösa ekvationen $4x^{136} + 25x = 43$ i $\mathbb{Z}_{137}$.
Eftersom 137 är ett primtal gäller för alla $a \in \mathbb{Z}_{137}$, $a \neq 0$, att $a^{136} = 1$ (Fermats lilla sats). $x = 0$ är inte en lösning till ekvationen, så den är ekvivalent med $4 \cdot 1 + 25x = 43$, dvs $25x = 39$.
Vi använder Euklides algoritm för att finna 25^{-1} i $\mathbb{Z}_{137}$: $137 = 5 \cdot 25 + 12$, $25 = 2 \cdot 12 + 1$ ger $1 = 25 - 2 \cdot 12 = 25 - 2(137 - 5 \cdot 25) = 11 \cdot 25 - 2 \cdot 137$, så $25 \cdot 11 \equiv 1 \pmod{137}$, dvs $25^{-1} = 11$ i $\mathbb{Z}_{137}$. Ekvationens lösning blir alltså $x = 25^{-1} \cdot 39 = 11 \cdot 39 (= 429 = 3 \cdot 137 + 18) = 18$.
Svar: Ekvationens enda lösning är $\boldsymbol{x = 18}$**.**

6) Definitionen av $\circ$, $m \circ n = m + n + 3$ för $m, n \in \mathbb{Z}$, ger att $(m-3) \circ (n-3) = (m-3) + (n-3) + 3 = (m+n) - 3$. Definiera $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ enligt $\beta(n) = n - 3$. β är en bijektion (ty den har en invers, given av $\beta^{-1}(n) = n + 3$) och enligt ovan gäller $\beta(m) \circ \beta(n) = \beta(m+n)$. Det betyder att $(\mathbb{Z}, \circ)$ har samma struktur som $(\mathbb{Z}, +)$ (speciellt är den en grupp, med identitet (nolla) $\beta(0) = -3$ och inversen till $\beta(n) = n - 3$ given av $\beta(-n) = -n - 3 = -(n-3) - 6$, dvs inversen till n är $-n - 6$) och β är en isomorfi mellan grupperna.
Saken är klar, en isomorfi ges av $\boldsymbol{\beta(n) = n - 3}$**.**
(Man kan förstås också verifiera gruppaxiomen för $(\mathbb{Z}, \circ)$ direkt.)

7) Det givna uttrycket $\bar{x}yz + y\bar{z}w + x(yzw + \bar{w}) + \bar{x}\bar{y}\bar{w}$ ger Karnaugh-diagrammet härintill.
Genom att, som i fig., täcka 1:orna med så stora rektanglar som möjligt (i fig. går en rektangel "runt kanten" två gånger) med sidlängder 1, 2 eller 4, får vi att uttrycket är ekvivalent med $\bar{y}\bar{w} + yw + yz + xy$.
Med andra sätt att välja rektanglarna kan en eller båda de sista termerna bytas mot $z\bar{w}$ respektive $x\bar{w}$.
Svar: Uttrycket blir $\boldsymbol{\bar{y}\bar{w} + yw + yz(/z\bar{w}) + xy(/x\bar{w})}$.

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

8a) Vi vet att fem hörn har valenser 1,2,3,4,5 och söker möjliga värden för det sjättes valens.
Summan av valenserna är 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal, så den sista valensen måste vara udda, alltså 1, 3 eller 5.
1, dvs valenser 1,1,2,3,4,5, går inte, ty de två sista hörnen skulle ge att alla valenser utom högst en var minst 2.
3, dvs valenser 1,2,3,3,4,5, går bra, se figuren.
5, dvs valenser 1,2,3,4,5,5, går inte, ty de två sista hörnen skulle ge att alla valenser var minst 2.



Svar: Enda möjligheten är valens 3.

b) Betrakta enligt ledningen först en sammanhängande graf. Den kan färgas med två färger på antingen 0 sätt (om den inte är bipartit) eller 2 sätt (om den är bipartit – eftersom det går en väg mellan två godtyckliga hörn i en sammanhängande graf, är en 2-färgning helt bestämd av färgen på ett hörn).
Enligt multiplikationsprincipen ges antalet sätt att färga en godtycklig graf av produkten av antalen för komponenterna. Antalet måste alltså vara antingen 0 eller 2^k, där k är antalet komponenter i grafen.
Svar: Möjliga värden är 0 och $\boldsymbol{2^k}$, $\boldsymbol{k = 0, 1, \ldots}$
($k = 0$ svarar här mot den "tomma grafen" utan hörn.)