KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i 5B1118, DISKRET MATEMATIK för CL
Onsdagen den 23 augusti 2006, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
Satser från kursen får användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

Till skrivningens poängsumma läggs bonuspoäng från vårterminen 2006.
Ange på skrivningsomslaget hur många bonuspoäng du har.
Totalt 10p ger säkert betyg 3, 14p ger betyg 4 och 18p ger betyg 5.
8-9p ger rätt att delta i kompletteringsskrivningen för betyg 3.
OBS! Kompletteringsberättigade som skrivit sin elpostadress på omslaget får elektroniskt besked.

1) (3p) Visa att $\log_4 12$ är ett irrationellt tal, dvs att det inte kan skrivas $\frac{m}{n}$ med m och n heltal, $n > 0$. ($\log_4 12$ är förstås det tal a som uppfyller $4^a = 12$.)

2) (3p) Anna, Britta och Olle skall få lördagsgodis. På totalt hur många sätt kan 74 st **identiska** lakritsbåtar och 6 st **olika** klubbor fördelas mellan de tre barnen, så att var och en får minst 2 lakritsbåtar och en klubba?
(Svaret får innehålla fakulteter, potenser och de fyra vanliga räknesätten.)

3) (3p) Låt m vara ett udda heltal. Visa att det för något av $n = 1, 2, \ldots, m$ gäller att $m \mid 2^n - 1$. (Ledning: Postfacksprincipen kanske kan användas?)

4) Permutationerna $\alpha, \beta \in S_9$ ges av
$\alpha(1)=\beta(5)=2$, $\alpha(2)=\beta(6)=3$, $\alpha(3)=\beta(3)=1$, $\alpha(4)=\beta(8)=5$, $\alpha(5)=\beta(9)=6$, $\alpha(6)=\beta(7)=7$, $\alpha(7)=\beta(1)=4$, $\alpha(8)=\beta(4)=9$, $\alpha(9)=\beta(2)=8$.
a) (1p) Skriv α, β och $\alpha\beta$ på cykelform.
b) (2p) Låt G vara en delgrupp till S_9 som innehåller α och β. Visa att $|G|$, antalet element i G, är delbart med 180.

5) (3p) Lös i $\mathbb{Z}_{137}$ ekvationen $4x^{136} + 25x = 43$. (137 är ett primtal.)

6) (3p) Definiera den binära operationen $\circ$ på $\mathbb{Z}$ enligt $m \circ n = m + n + 3$ för $m, n \in \mathbb{Z}$. Visa att $(\mathbb{Z}, \circ)$ är en grupp och att den är isomorf med $(\mathbb{Z}, +)$.

7) (3p) Skriv följande booleska uttryck på en minimal disjunktiv form (dvs som en ”summa” med så få och så korta termer som möjligt):

$$\bar{x}yz + y\bar{z}w + x(yzw + \bar{w}) + \bar{x}\bar{y}\bar{w}.$$

8a) (2p) I en graf med sex hörn har fem av hörnen valenserna 1,2,3,4,5. Vilka värden är möjliga för det sjätte hörnets valens? Motivera ditt svar ordentligt.
(Liksom i kursboken betraktar vi bara grafer utan loopar och multipla kanter.)
b) (2p) Låt $P_G(2)$ vara antalet olika sätt man kan hörnfärga grafen G med (högst) 2 färger. Bestäm alla värden som $P_G(2)$ kan anta (för olika grafer G).
(Ledning: Betrakta varje komponent av G för sig.)

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.