KTH
Matematik

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret matematik för Media, CL och IT, 5B1118, måndagen den 28 maj.

DEL A

1. (3p) Bestäm samtliga lösningar i ringen Z_{23} till ekvationen

$$19x + 2 = 17.$$

Lösning: Söker först en invers till 19 i ringen Z_{23}. Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 23 &= 1 \cdot 19 + 4 \\ 19 &= 5 \cdot 4 - 1 \end{aligned}$$

varur vi får att $1 = 5 \cdot 4 - 19 = 5(23 - 19) - 19 = 5 \cdot 23 - 6 \cdot 19$. Alltså är $19^{-1} = -6$ i ringen Z_{23}. Vi löser nu ekvationen:

$$19x + 2 = 17 \quad \Leftrightarrow \quad 19x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -6 \cdot 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -90 \pmod{23} = 2$$

SVAR: 2.

2. (3p) I en skolklass med 13 flickor och 12 pojkar skall man utse en grupp bestående av tre flickor och fyra pojkar. På hur många sätt kan en sådan grupp utses om precis en av pojkarna P_1 och P_2 i klassen, skall vara med i gruppen. (Svaret får innehålla de fyra räknesätten.)

Lösning: Anatl sätt att utse en grupp fyra pojkar med pojken P_1 men utan pojken P_2 är

$$\binom{12-2}{3}$$

ty utse först pojken P_1, tag sedan bort P_2. Återstår nu $12 - 2$ pojkar av vilka tre till skall väljas till gruppen.

På lika många sätt kan en pojkgrupp med P_2 medn utan P_1 utses.

Antalet sätt som flickorna kan utses på är

$$\binom{13}{3}.$$

Multiplikationsprincipen ger nu totala antalet sätt dvs

SVAR:

$$\binom{13}{3} \cdot 2 \cdot \binom{10}{3} = 2 \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}.$$

3. (3p) Vi betraktar gruppen $G = (Z_{24}, +)$. Mängden $\{3, 9, 15, 21\}$ bildar en sidoklass till en delgrupp H till G. Bestäm H och ange ytterligare två sidoklasser till H i G.

   Lösning: Vi ser att
$$\{3, 9, 15, 21\} = 3 + \{0, 6, 12, 18\}$$
   och vi ser att $H = \{0, 6, 12, 18\}$ är en delgrupp till G. Två andra sidoklasser till H är t ex
$$1 + H = \{1, 7, 13, 19\} \quad \text{och} \quad 2 + H = \{2, 8, 14, 20\}$$

4. En 1-felsrättande kod C har kontrollmatrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (1p) Ange antalet ord i C.

   Svar: $2^{\text{antal kolonner - antal rader}} = 2^{6-3} = 8$

   (b) (1p) Ange ett kodord $\bar{c}$ som inte är nollordet, dvs $\bar{c} \in C$ och $\bar{c} \neq 000000$.

   Lösning: Om H betecknar matrisen ovan så har vi att andra kolonnen plus fjärde plus femte kolonnen i H blir lika med noll om man räknar i ringen Z_2. Således är tex ordet 010110 ett kodord.

   Svar: 010110.

   (c) (1p) Ordet 111111 tillhör inte C. Undersök om ordet går att rätta till ett ord $\bar{c}$ i C. Bestäm i så fall ordet $\bar{c}$.

   Lösning: Med H betecknande matrisen ovan, har vi att
$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Eftersom den kolonnen inte finns med i matrisen H går ordet inte att rätta.

5. (3p) Undersök om det finns något träd med 37 noder, sådana att 15 noder har valensen (=graden) 1, 15 noder har valensen 2, 4 noder har valensen 4 och 3 noder har valensen 5.

   Lösning: Vi summerar nodernas valenser och får att valenssumman är
$$\sum_{v \in V} v = 15 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 76.$$
   Antalet kanter är då $76/2 = 38$. Om grafen vore ett träd skulle antalet kanter vara ett mindre än antalet noder dvs 36. Således

   Svar: Det kan inte vara ett träd.

DEL B

6. (4p) Betrakta den kompletta (fullständiga) grafen K_{16}. Den grafen har ingen Eulerkrets. Hur många kanter måste man minst ta bort för att få en graf som har en Eulerkrets?

(Antalet poäng på denna uppgift, beräknas utifrån hur pass nära du kommer det minsta antalet kanter som måste tas bort och hur pass väl du motiverat din lösning. Enbart ett korrekt svar ger inte full poäng på denna uppgift.)

Lösning: En graf har en Eulerkrets precis då varje nod har en jämn valens. Varje nod i K_{16} har valensen 15. Minst en kant från varje nod måste avlägsnas för att en Eulerkrets skall uppstå. Mellan varje par av noder i K_{16} finns precis en kant. Vi delar in de 16 noderna i åtta disjunkta par, dvs om noderna är $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{16}$ bildar vi paren

$$\{v_1, v_2\},\ \{v_3, v_4\},\ \{v_5, v_6\},\ \ldots,\ \{v_{15}, v_{16}\}$$

och tar sedan bort kanterna mellan v_1 och v_2, mellan v_3 och v_4 osv. Så det minsta antal kanter som måste tas bort är 8 och detta antal räcker.

7. (4p) Betrakta den booleska funktionen

$$f(x,y,z,w) = \overline{z\bar{w}y(x+\bar{y})}$$

Bestäm en minimal disjunktiv form för $f(x,y,z,w)$.

Lösning: Vi räknar oss fram (Karnaugh diagram fungerar också alldeles utmärkt) och får, då $y\bar{y} = 0$, att

$$f(x,y,z,w) = \overline{z\bar{w}y(x+\bar{y})} = \overline{z\bar{w}yx + z\bar{w}y\bar{y}} = \overline{z\bar{w}yx} = \bar{z} + w + \bar{y} + \bar{x},$$

och därmed vårt

Svar: $\bar{z} + w + \bar{y} + \bar{x}$.

8. (4p) Bestäm den största gemensamma delaren till de tre talen 1980, 1680 och 1188.

Lösning: Om D är den största gemensamma delaren till de tre talen gäller att $D \mid 1980$ och $D \mid 1680$ och därmed att $D \mid sgd(1680, 1980)$. Vi bestämmer nu med hjälp av Euklides algoritm $sgd(1680, 1980)$:

1980	=	$1 \cdot 1680$	+	300
1680	=	$6 \cdot 300$	-	120
300	=	$3 \cdot 120$	-	60
120	=	$2 \cdot 60$	+	0

Således är $sgd(1980, 1680) = 60$. Nu vet vi att det sökta talet D delar 60. Med D skall också dela 1188. Då kommer D att dela $sgd(1188, 60)$ som nu bestäms

1188	=	$20 \cdot 60$	-	12
60	=	$5 \cdot 12$	+	0

Den eftersökta största gemensamma delaren D till de tre talen måste alltså dela talet 12. Men talet 12 delar samtliga de tre givna talen och är då den största gemensamma delaren.

Svar: 12

9. (4p) Det flyger k duvor mot n reden. Duvorna väljer reden slumpvis och helt oberoende av hur de andra duvorna väljer sina reden. Om k är mindre än eller lika med n, $k \leq n$, hur stor är då sannolikheten att minst ett rede innehåller minst två duvor.

Lösning: Det finns totalt n^k olika sätt för de k duvorna att placera sig på i redena och alla dessa sätt är lika sannolika. Antalet sätt där varje rede innehåller högst en duva är $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, ty var och en av de k duvorna skall då välja ett eget rede. Den första duvan har då n redan att välja bland, den andra $n-1$ redan att välja bland osv. Av de n^k stycken olika fördelningarna blir antalet fördelningar där minst ett rede innehåller två duvor lika med

$$n^k - n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Eftersom alla fördelningar är lika sannolika så blir den sökta sannolikheten lika med

Svar:

$$\frac{n^k - n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k}.$$

10. (4p) Generellt gäller följande sats för cykliska grupper:

Sats. *Alla delgrupper till en cyklisk grupp G är cykliska. Om G har n element så finns till varje positiv delare d till n precis en delgrupp med d element.*

Denna sats är inte helt lätt att visa och det skall du inte heller göra. Du får nu följande information om grupperna G, H och K:

(i) Gruppen G är en cyklisk grupp.
(ii) H och K är delgrupper till G.
(iii) Antalet element i H är 348.
(iv) Antalet element i K är 570.

Undersök om ovanstående information räcker för att avgöra om $H \cap K$ har ett element av ordning sex.

Lösning: Emedan H är en delgrupp till G så är H cyklisk. Då $6 \mid 348$ så har H, enligt den givna satsen, en delgrupp H_1 med sex element. På samma sätt har K en delgrupp K_1 med sex element eftersom $6 \mid 570$. Eftersom H och K är delgrupper till G så kommer även H_1 och K_1 att vara delgrupper till G. De har bägge sex element och det finns bara en delgrupp till G med sex element så H_1 måste vara lika med K_1,

$$H_1 = K_1.$$

Enligt satsen är varje delgrupp till G cyklisk och alltså gäller detta även H_1 och K_1. Nu vet vi att

$$H_1 = K_1 =< \alpha >= \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^6 = e\}.$$

Elementet α har ordning sex och tillhör både H_1 och K_1 och därmed både H och K, dvs

$$\alpha \in H \cap K.$$

Informationen räckte alltså för att avgöra om snittet $H \cap K$ hade ett gemensamt element av ordning sex.