KTH
Matematik

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret matematik för Media, CL och IT, 5B1118, onsdagen den 22 augusti.

Examinatorer: Olof Heden och Bengt Ek.

DEL A

1. (a) .

$$\begin{array}{rcccc} 376 & = & 2\cdot 188 & + & 0 \\ 188 & = & 2\cdot 94 & + & 0 \\ 94 & = & 2\cdot 47 & + & 0 \\ 47 & = & 2\cdot 23 & + & 1 \\ 23 & = & 2\cdot 11 & + & 1 \\ 11 & = & 2\cdot 5 & + & 1 \\ 5 & = & 2\cdot 2 & + & 1 \\ 2 & = & 2\cdot 1 & + & 0 \\ 1 & = & 2\cdot 0 & + & 1 \end{array}$$

Således

Svar: $(101111000)_2$

(b) (1p) Talet n har i två-systemet utvecklingen $(10111001)_2$. Bestäm talet n i decimalsystemet. $(10111001)_2 = 1\cdot 128 + 0\cdot 64 + 1\cdot 32 + 1\cdot 16 + 1\cdot 8 + 0\cdot 4 + 0\cdot 2\cdot 1 = 185$

Svar: $(185)_{10}$

(c) (1p) Skriv talet $(121)_8$ i bas nio.

$(121)_8 = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8 + 1 = 81 = 9^2$

Svar: $(121)_8 = (200)_9$

2. (a) **Svar:** $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$.

(b) **Svar:**

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

(c) **Svar:** $S(5,3) = S(4,2)+3S(4,3) = (S(3,1)+2S(3,2))+3(S(3,2)+3S(3,3)) = S(3,1)+5S(3,2)+9S(3,3) = S(3,1)+5(S(2,1)+2S(2,2))+9S(3,3) = S(3,1)+5S(2,1)+10S(2,2)+9S(3,3) = 1+5+10+9 = 25$

3. (a) **Svar:** $(1\ 3\ 4\ 2)(5\ 6)(1\ 3)(2\ 4)(5\ 6) = (1\ 3\ 4\ 2)(1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(5\ 6) = (1\ 3\ 4\ 2)(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 4)$.

(b) Vi skriver $\psi\varphi$ som en produkt av disjunkta cykler. Vi får $\psi\varphi = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(1\ 3\ 4\ 2)(5\ 6) = (1\ 3)(2\ 4)(1\ 3\ 4\ 2)(5\ 6)(5\ 6) = (1\ 3)(2\ 4)(1\ 3\ 4\ 2) = (2\ 3)$. Så **Svar:** 2.

(c) Produkten av två permutationer är jämn om och endast om bägge permutationerna är båda jämna eller båda udda. Spelar ingen roll i vilken ordning de står. Så om $\gamma\mu$ är en jämn permutation så måste också $\mu\gamma$ vara en jämn permutation.

4. Vi bestämmer först d ur sambandet $e\cdot d \equiv 1 \pmod{m}$ där om $n = p\cdot q$ så $m = (p-1)(q-1)$. Då $143 = 11\cdot 13$ så $m = 120$. Euklides algoritm ger

$$\begin{array}{rcrcr} 120 & = & 103 & + & 17 \\ 103 & = & 6 \cdot 17 & + & 1 \end{array}$$

varur vi får

$$1 = 103 - 6 \cdot 17 = 103 - 6(120 - 103) = 7 \cdot 103 - 6 \cdot 120 \equiv_{120} 7 \cdot 103.$$

Härav sluter vi att $d = 7$. Det gäller då att

$$D(3) = 3^7 \pmod{143} = 3^5 3^2 \pmod{143} = 243 \cdot 9 \pmod{143} = 100 \cdot 9 \pmod{143} = 42$$

Svar: 42.

5. (a) Vi använder att valenssumman är lika med två gånger antalet kanter, dvs $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$. Då $8 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 56$ så blir antalet kanter 28.
   Svar: 28.
   (b) Vi börjar med att rita en cykelgraf med 16 noder. I den grafen, och med användande av dessa noder ritar vi ut en åttacykel som använder varannan nod i den ursprungliga cykeln. Tillslut ritar vi ut en cykel av längd fyra på samma sätt i åttacykeln, t ex.
   (c) Som meddelades vid skrivningen kan man förutsätta att grafen är sammanhängande. Eftersom alla noder har en jämn valens så kommer grafen att ha en Eulerkrets.

DEL B

6. Talet 53 är ett primtal. Vi använder Fermats lilla sats och får:

$$37^{209} \equiv_{53} 37^{4 \cdot 52+1} \equiv_{53} (37^{52})^4 \cdot 37 \equiv_{53} 1^4 \cdot 37 \equiv_{53} 37.$$

Svar: 37.

7. Ett element a i Z_{30} är inverterbart, precis då $sgd(a, 30) = 1$. De inverterbara elementen är då

$$G = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

Gruppen har åtta element. Vore den cyklisk så skulle det finnas ett element av ordning 8. När vi undersöker om ett sådant finns använder vi oss av kunskapen att elementens ordningar delar antalet element i gruppen dvs i detta fall 8. Vi testar nu elementen.

$$7^2 = 19 = -11, \quad 7^4 = (-11)^2 = 1$$

Vi sluter att ordningen av elementet 7 är fyra, ordningen av elementet 19, liksom 11 är två och att ordningen av elementet 23, dvs -7 också är fyra. Elementet 29, dvs -1 är också två. Det skall nu bli mycket spännande att se vad elementet 13 har för ordning.

$$13^2 = 19 \quad \Rightarrow \quad 13^4 = 19^2 = 1.$$

Så inget element i gruppen har ordning åtta och gruppen kan inte vara cyklisk.

8. Vår lösning bygger på att vi först, med hjälp av en kontrollmatris, skapar en 1-felsrättande kod med 64 stycken ord,
a) innehållande bland andra ordet $\bar{1} = 1111111111$,
b) men inte ordet 0000111111.
Koden innehåller då ett ord $\bar{c}$ på avstånd ett från detta ord, och vi skall ej ta bort ordet $\bar{c}$, men vi tar bort ordet $\bar{1}$.

Kontrollmatrisen skall vara av formatet 10 kolonner och $10-6$ stycken rader, ty då kommer vi att få precis 64 stycken kodord. Lite trial and error ger kontrollmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Så låt C vara den 1-felsrättande kod som denna matris ger. Koden C innehåller ordet $\bar{1}$ och ordet $\bar{c} = 1000111111$ på avstånd 1 från ordet 0000111111. Vi ser också att ordet $\bar{d} = 1011000001$ tillhör C och ligger på avstånd ett från ordet 1111000000. Vidare ligger ordet 0011111110 i C och har ett avstånd tre till ordet $\bar{1}$.

Vår lösning av problemet är alltså att ta bort tre ord från C, ett av de borttagna orden skall vara $\bar{1}$, och de två andra skall inte vara något av orden $\bar{c}$ eller $\bar{d}$.

9. (4p) En skolklass med 10 pojkar och 10 flickor skall delas in i fyra lika stora grupper. På hur många olika sätt kan detta ske om varje grupp måste innehålla minst en pojke och minst en flicka?

Obs: Svaret får innehålla alla de fyra räknesätten.

Vi löser problemet med hjälp av att dela in i olika fall beroende på antalet flickor i grupperna. Max antal flickor i en grupp är fyra och minantalet flickor är ett.

Fall 1: Två grupper innehåller fyra flickor och två grupp innehåller en flicka.

Fall 2: En grupp innehåller fyra flickor, en grupp innehåller tre flickor, en grupp två flickor och en grupp en flicka.

Fall 3: En grupp innehåller fyra flickor, och tre grupper innehåller två flickor vardera.

Fall 4: Tre grupper innehåller tre flickor och en grupp en flicka.

Fall 5: Två grupper innehåller tre flickor och två grupper innehåller två flickor.

När vi beräknar antalet möjligheter i respektive fall, måste vi tänka på ått om vi börjar med att utse flickorna till respektive grupp så är grupperna oetiketterade, mern när sedan pojkarna väljs så är grupperna etiketterade.

Vi börjar med det enkalste fallet fall 2.

I fall 2 blir antalet möjligheter

$$\binom{10}{4,3,2,1}\binom{10}{1,2,3,4}.$$

I fall 1 så får vi

$$\frac{1}{2!2!}\binom{10}{4,4,1,1}\binom{10}{1,1,4,4}$$

I fall 3 får vi

$$\frac{1}{3!}\binom{10}{4,2,2,2}\binom{10}{1,3,3,3}$$

I fall 4 får vi

$$\frac{1}{3!}\binom{10}{3,3,3,1}\binom{10}{2,2,2,4}$$

I fall 5 får vi

$$\frac{1}{2!2!}\binom{10}{3,3,2,2}\binom{10}{2,2,3,3}$$

Svar:

$$\frac{10!10!}{1!2!3!4!1!2!3!4!}+\frac{10!10!}{2!2!4!4!4!4!}+\frac{10!10!}{3!4!2!2!2!3!3!3!}+\frac{10!10!}{3!3!3!3!2!2!2!4!}+\frac{10!10!}{2!2!3!3!2!2!2!2!3!3!}.$$

10. Informationen räcker.

Låt e beteckna antalet kanter, v beteckna antalet noder och r beteckna antalet områden. Att varje kant gränsar till precis två områden och varje område begränsas av precis tre kanter ger sambandet

$$2e = 3r.$$

Att exakt fem områden möts vid varje nod, och varje område har tre noder, ger sambandet

$$3r = 5v \qquad (\text{alternativt} \quad 2e = 5v).$$

Eftersom grafen är planär och sammanhängande gäller Eulers formel

$$v + r = e + 2.$$

I denna formel substituerar vi nu e och r med hjälp av de bägge sambanden ovan. Vi får

$$\frac{3}{5}r + r = \frac{3}{2}r + 2,$$

som vi förenklar till

$$\frac{6 + 10 - 15}{10}r = 2 \quad \text{dvs} \quad r = 20.$$

Våra första bägge samband ger då omdelbart att $e = 30$ och $v = 12$.