KTH Matematik
B.Ek

Lösningar tentan SF1610(/5B1118) DISKRET MATEMATIK, CL, 5 maj 2008

Tryckfel kan förekomma.

1) Eftersom $\operatorname{sgd}(14,33)=1$ finns ett heltal x med $14x \equiv 1 \pmod{33}$. Vi finner det med Euklides algoritm:

$$\begin{cases} 33 &= 2\cdot 14+5, \\ 14 &= 2\cdot 5+4, \\ 5 &= 1\cdot 4+1, \\ 4 &= 4\cdot 1+0 \end{cases} \quad \text{och därmed} \quad \begin{cases} 1 &= 5-4 = 5-(14-2\cdot 5) = \\ &= -14+3\cdot 5 = -14+3(33-2\cdot 14) = \\ &= 3\cdot 33-7\cdot 14 \end{cases}$$

så $14\cdot(-7) \equiv 14\cdot(33-7) \equiv 14\cdot 26 \equiv 1 \pmod{33}$.
Svar: Ja, t.ex. $x=-7$ och $x=26$.

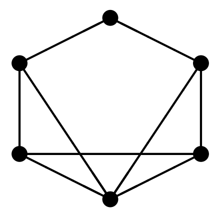
2) Totalt kan 12 dagar väljas bland de 17 på $\binom{17}{12}$ sätt.
Av dessa sätt har $\binom{15}{10}$ sätt både första och sista dagen med (övriga 10 väljs bland 15 dagar).
Det sökta antalet är alltså skillnaden, $\binom{17}{12}-\binom{15}{10} = \frac{17!}{12!\cdot 5!} - \frac{15!}{10!\cdot 5!} = \frac{15!}{12!\cdot 5!}(17\cdot 16-12\cdot 11) = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}(17\cdot 16-12\cdot 11) = 7\cdot 13(17\cdot 4-3\cdot 11) = 91\cdot 35 = 3185$.
Svar: På $\frac{15!}{12!\cdot 5!}(17\cdot 16-12\cdot 11)(=3185)$ sätt.

Alternativt kan man räkna på de tillåtna fallen, $\binom{15}{12}+2\binom{15}{11}=\cdots=3185$.

3) Man finner π på cykelform $\pi=(1\,6\,2\,7)\,(3\,5)\,(4\,9\,8)$, ty $\pi(1)=6$, $\pi(6)=2$, etc. Ordningen för en permutation (den lägsta positiva potensen av den som är identitetspermutationen) är minsta gemensamma multipeln av cyklernas längder, dvs $o(\pi)=\operatorname{mgm}(4,2,3)=12$.
Svar: π är på cykelform $(1\,6\,2\,7)\,(3\,5)\,(4\,9\,8)$. Dess ordning är 12.

4) Eftersom $H(111001)^T=(001)^T$ (H:s 3:e kolonn), $H(101101)^T=(000)^T$ och $H(010111)^T=(010)^T$ (H:s 2:a kolonn), har det blivit fel i position 3, inget fel respektive fel i position 2. Sända var alltså (110001), (101101) och (000111).
Svar: De sända orden var (110001), (101101) och (000111)

5) Vi undersöker de olika valensföljderna:
i) 1,2,2,3,4,5 : **omöjlig**, ty summan av valenserna skall vara 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal.
ii) 2,3,3,3,3,4 : **möjlig**, se figuren till höger.
iii) 2,2,4,4,5,5 : **omöjlig**, ty de två sista hörnen skulle ha kanter till alla andra. Om man tar bort dem och deras kanter, återstår en graf med valenser 0,0,2,2. Det går inte utan multipla kanter.



Svar: Det finns en graf med valenserna i ii), men ingen med dem i i) eller iii).

6) Enligt Fermats lilla sats är $6^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, ty 13 är ett primtal och $13 \nmid 6$.
Eftersom $5^2=25\equiv 1 \pmod{12}$ är $5^{2008}=(5^2)^{1004}\equiv 1^{1004}=1 \pmod{12}$, så $5^{2008}=12k+1,\ k\in\mathbb{N}$. Alltså fås $6^{5^{2008}}=6^{12k+1}=(6^{12})^k\cdot 6\equiv 1^k\cdot 6=6 \pmod{13}$.
Svar: Den (minsta icke-negativa) resten då $6^{5^{2008}}$ divideras med 13 är 6.

7) Vi har en ändlig graf där varje hörn har valens minst 2. Betrakta en stig $v_0v_1v_2\ldots v_m$ av maximal längd i grafen (eftersom ingen stig är längre än antalet hörn i grafen finns en sådan). Från v_m går minst en kant till, tydligen till ett hörn som redan besökts (annars kunde stigen förlängas), v_k säg. Då är $v_kv_{k+1}\ldots v_mv_k$ en cykel i grafen. **Saken är klar.**
Alternativ: Om grafen saknar cykler är varje komponent ett träd och antalet kanter (en) mindre än antalet hörn där. Det motsäger att summan av valenserna (alla minst 2) är 2·(antalet kanter).

8) Vi visar med induktion att $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=(F_{2n})^2$ för $n=1,2,3,\ldots$ gäller för Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$. Vi använder att $F_2=F_1+F_0=1+0=1$.
Bas: $VL_1=F_1F_2=1\cdot 1=1$, $HL_1=(F_2)^2=1^2=1$, så **påståendet är sant för $n=1$.**
Steg: Antag att påståendet är sant för $n=k$. Då fås $VL_{k+1}=F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2k-1}F_{2k}+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}=VL_k+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}=HL_k+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}=F_{2k}^2+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}=F_{2k}(F_{2k}+F_{2k+1})+F_{2k+1}F_{2k+2}=F_{2k}F_{2k+2}+F_{2k+1}F_{2k+2}=(F_{2k}+F_{2k+1})F_{2k+2}=(F_{2k+2})^2=HL_{k+1}$,
så **om påståendet är sant för $n=k$ är det sant för $n=k+1$.**
Enligt induktionsprincipen är det sant för alla $n=1,2,3,\ldots$ **Saken är klar.**

9a) Låt X vara mängden av alla möjliga placeringar av de 16 barnen på de 22 stolarna och C de där Adam och Barbro sitter jämte varandra. Det sökta antalet är $|X \setminus C| = |X| - |C|$. Här är $|X| = 22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 7 = \frac{22!}{6!}$ (antalet injektioner från en 16-mängd (barnen) till en 22-mängd (stolarna)) och $|C| = 2 \cdot \frac{21!}{6!}$ (2 möjliga ordningar mellan de två och sedan ses de som ett stort barn, nu med 15 barn och 21 stolar).
Det sökta antalet är alltså $\frac{22!}{6!} - 2 \cdot \frac{21!}{6!} = \frac{21!}{6!}(22-2) = 20\frac{21!}{6!}$
b) Låt A, B vara placeringarna där Barbro och Cyril, respektive Adam och Cyril, sitter bredvid varandra. Det sökta antalet är då (inklusion och exklusion) $|X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) - |A \cap B \cap C|$. Som i a) är $|A| = |B| = |C| = 2 \cdot \frac{21!}{6!}$, medan $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 2 \cdot \frac{20!}{6!}$ (om Cyril sitter bredvid både Barbro och Adam, sitter de tre i rad med Cyril i mitten, 2 möjliga sätt, som ett extrastort barn av 14, med totalt 20 platser) och $|A \cap B \cap C| = 0$ (de kan inte alla tre sitta i mitten).
Det sökta antalet i detta fall är alltså $\frac{22!}{6!} - 6 \cdot \frac{21!}{6!} + 6 \cdot \frac{20!}{6!} - 0 = 342\frac{20!}{6!} = 57\frac{20!}{5!}$
Svar: a) På $20\frac{21!}{6!}$(= 1419192838103040000) sätt,
b) på $57\frac{20!}{5!}$(= 1155628453883904000) sätt.

10a) Vi har en ändlig grupp G med delgruppen H och ett element $k \in G$ och skall för varje $g \in G$ visa att $g \in kH$ om och endast om $gH = kH$.
om: Eftersom identitetselementet $I \in H$ (H är ju en grupp) gäller alltid att $g = gI \in gH$, så $gH = kH$ medför $g \in kH$.
endast om: Om $g \in kH = \{gh \mid h \in H\}$ är $g = kh_1$ för ett $h_1 \in H$. Då är $gH = \{kh_1h \mid h \in H\} \subseteq kH$, ty $h_1h \in H$, alla $h \in H$ (H är ju en grupp). Men $k = gh_1^{-1}$, där ju $h_1^{-1} \in H$ (H en grupp), så p.s.s. fås $kH \subseteq gH$. Alltså $gH = kH$.
Saken är klar
b) Låt $\mathcal{G} = (X \cup Y, E)$ vara den bipartita grafen med hörnmängderna X och Y givna av $X = \{H\text{:s vänstersidoklasser i } G\}$ och $Y = \{H\text{:s högersidoklasser i } G\}$ och en kant mellan gH och Hk precis om $gH \cap Hk \neq \emptyset$. Då är $|X| = |Y| = \frac{|G|}{|H|} = m$ (enligt a) är ju olika sidoklasser disjunkta, de är alla lika stora som $|H|$ eftersom $h \mapsto gh$ ger en bijektion $H \to gH$).
Enligt Halls sats finns en fullständig matchning i $\mathcal{G}$ om (och endast om) $|A| \leq |P(A)|$ för alla $A \subseteq X$, där $P(A) = \{y \in Y \mid \text{ det finns } x \in A \text{ med } xy \in E\}$, dvs mängden av grannar till element i A. Eftersom elementen i A är vänstersidoklasser är de disjunkta, så de innehåller $|A| \cdot |H|$ av G:s element. $P(A)$ innehåller de högersidoklasser som innehåller minst ett av dessa gruppelement och eftersom högersidoklasserna är disjunkta av storlek $|H|$ måste vi ha $|P(A)| \cdot |H| \geq |A| \cdot |H|$ och det följer att $|P(A)| \geq |A|$. Det finns alltså en fullständig matchning i $\mathcal{G}$.
Välj för varje matchat par (gH, Hk) ett gemensamt element g_i. Då är (enligt a)) $gH = g_iH$ och $Hk = Hg_i$, så

$$G = g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_mH = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \cdots \cup Hg_m.$$

Saken är klar.