KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i kursen
SF1610(/5B1118), DISKRET MATEMATIK för CL (m.fl.)
onsdagen den 20 augusti 2008, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E(/3), krävs

dels minst 12p på del I,

dels

totalt minst:	32p	27p	22p	18p	15p
för betyg:	A/5	B	C/4	D	E/3

Betygen A–E gäller för **kurs SF1610** (normalt de som registrerades första gången på kursen ht07 eller vt08) och betygen 3–5 gäller för **kurs 5B1118**.

Den som inte blivit godkänd, men fått minst 12p totalt, får Fx(/K) och därmed rätt att delta i en **kompletteringsskrivning** för betyg E(/3). Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.
Utan minst 12p på denna del kan skrivningen inte bli godkänd.

1) (3p) Låt som vanligt fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras av
$F_0 = 0,\ F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$ för $n = 0, 1, 2, \dots$
Visa att $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

2) (3p) Hur många funktioner $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ antar 4 olika värden, inte alla udda?

3) (3p) Finn alla lösningar i $\mathbb{Z}_{14}$ till ekvationen $x^2 = x + 6$.

4) (3p) Uttryck den booleska funktionen

$$f(x, y, z, w) = xzw + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}zw + y\bar{z}w$$

på **minimal disjunktiv form**, dvs disjunktiv form med så få '$\cdot$' och '+' som möjligt. ('$\cdot$' räknas förstås även när de (som ovan) är underförstådda.)

5) (3p) Grafen $G = (V, E)$ har 10 hörn (noder) och 18 kanter, dvs $|V| = 10$ och $|E| = 18$, och består av två komponenter. Den ena komponenten är en fullständig (komplett) graf och den andra är ett träd.
Hur många hörn (noder) innehåller var och en av G:s komponenter?

Vänd!

DEL II

6) (4p) Finn alla heltalslösningar (x, y) till den av följande ekvationer som har sådana och förklara varför den andra saknar heltalslösningar.

$$(i) \quad 111x + 84y = 15 \qquad\qquad (ii) \quad 84x + 111y = 16$$

7) (4p) En sammanhängande graf $G = (V, E)$ har 66 hörn (noder), dvs $|V| = 66$, och 107 kanter, dvs $|E| = 107$. Om ingen cykel i grafen har längd (strikt) kortare än 5, kan G vara planär?

8) (4p) Finn ett så litet naturligt tal n som möjligt, så att för alla heltal x, y gäller att

$$y \equiv x^{107} \pmod{1271} \quad \Rightarrow \quad y^n \equiv x \pmod{1271}.$$

Minst 3p ges för ett korrekt (och riktigt motiverat) n. $[1271 = 31 \cdot 41]$.

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Permutationen $\pi \in S_{10}$ ges av att $\pi(1)=7$, $\pi(2)=10$, $\pi(3)=9$, $\pi(4)=2$, $\pi(5)=5$, $\pi(6)=8$, $\pi(7)=1$, $\pi(8)=6$, $\pi(9)=3$, $\pi(10)=4$.
a) (1p) Skriv π på cykelform och finn ordningen för π.
b) (1p) Låt $\sigma \in S_{10}$. Ange cykelformen för permutationen $\sigma\pi\sigma^{-1}$.
c) (3p) Hur många permutationer i S_{10} kommuterar med π, dvs för hur många $\sigma \in S_{10}$ gäller $\sigma\pi = \pi\sigma$ (dvs $\sigma\pi\sigma^{-1} = \pi$)?

10) Låt G vara en ändlig grupp och H, K och L vara delgrupper till G.
a) (1p) Visa att $H \cap K$ också är en delgrupp till G.
b) (1p) Visa med ett exempel att $H \cup K$ inte säkert är en delgrupp till G.
c) (3p) Visa att $|H \cup K \cup L|$ är delbart med $|H \cap K \cap L|$.
$|M|$ betecknar som vanligt antalet element i mängden M.

Lösningar kommer att läggas ut på CL:s kurssida,
(http://www.math.kth.se/math/GRU/2007.2008/SF1610/CL/)