Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE, CL2 och Media 1, SF1610 och 5B1118, tisdagen den 21 oktober 2008, kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Lös ekvationen $14x = 17$ i ringen Z_{27}.

2. (3p) En skola med 30 flickor, 40 pojkar och 10 lärare skall utse en arbetsgrupp bestående av fyra pojkar, fyra flickor och tre lärare. På hur många sätt kan detta ske om lärana herr A och fru B inte kan vara med i samma arbetsgrupp.

3. (3p) Vilket är det minsta antal element en grupp G måste ha om G skall ha en delgrupp H_1 med 2 element, en delgrupp H_2 med 4 element och en delgrupp H_3 med 5 element. Ge också ett exempel på en sådan grupp G.

   (**Anm.** G får ha fler delgrupper än grupperna H_1, H_2 och H_3.)

4. (3p) Konstruera ett RSA-krypto, dvs ange parametrar n, e och d. Dekryptera därefter meddelandet 2, dvs bestäm $D(2)$.

5. (3p) För vilka värden på talet n har den kompletta grafen K_n en Eulerkrets.

   (Glöm ej att motivera ditt svar.)

DEL II

6. (3p) Visa att det inte finns något träd med 30 noder varav tretton noder har valens 1, tolv noder har valens 2 och fem noder har valens 3.

7. Låt $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ och $\psi = (7\ 8\ 9\ 10)$ vara permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

   (a) (1p) Bestäm två naturliga tal n och m sådana att permutationen $\varphi^n\psi^m$ har ordning 3.

   (b) (2p) Bestäm samtliga naturliga tal n och m sådana att permutationen $\varphi^n\psi^m$ har ordning 6.

   (c) (1p) Beskriv samtliga naturliga tal n och m sådana att permutationen $\varphi^n\psi^m$ är en jämmn permutation.

8. (4p) Låt $n = 2^5 3^{10} 5^8$ och låt $m = 8000 \cdot 1377$. Bestäm antalet positiva heltal q som delar både n och m.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt C vara en 1-felsrättande kod som erhålles på sedvanligt sätt ur en kontrollmatris H. Koden C innehåller bland annat orden 11111100000 och 11100001100.

   (a) (1p) Bestäm det största antalet ord koden C kan ha..

   (b) (2p) Bestäm det minsta antalet ord koden C kan ha och beskriv samtliga koder C som har detta minsta antal ord.

   (c) (2p) För vilka tal k finns en kod C med k stycken ord och som uppfyller de givna förutsättningarna ovan.

10. Låt $\mathcal{F}(A, B)$ beteckna mängden av alla funktioner från mängden A till mängden B, och låt $\mathcal{S}(A, B)$ beteckna mängden av alla surjektioner av A på B. Låt $n = |A|$ och $m = |B|$.

    (a) (1p) Det finns precis ett värde på m för vilket $\mathcal{F}(A, B) = \mathcal{S}(A, B)$ för alla mängder A. Bestäm detta värde på m.

    (b) (1p) Bestäm kvoten
    $$\frac{|\mathcal{S}(\{1, 2, 3, 4\}, \{a, b\})|}{|\mathcal{F}(\{1, 2, 3, 4\}, \{a, b\})|}$$

    (c) (3p) Undersök om det till varje värde på talet m finns ett tal n sådant att
    $$\frac{|\mathcal{S}(A, B)|}{|\mathcal{F}(A, B)|} \geq \frac{1}{2}.$$