KTH Matematik **Lösningar tentan 19 augusti 2009**
B.Ek **SF1610(/5B1118) DISKRET MATEMATIK,**

Tryckfel kan förekomma.

1a) (1p) Vilka av elementen 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15 i $\mathbb{Z}_{105}$ är inverterbara?
b) (2p) Bestäm en av (de existerande) inverserna i a).

---

a) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, så villkoret $\text{sgd}(x, 105) = 1$ för inverterbarhet uppfylls bara av 11 och 13.
b) Vi finner 11^{-1} i $\mathbb{Z}_{105}$ med Euklides algoritm:

$$\begin{cases} 105 = 9 \cdot 11 + 6, \\ 11 = 2 \cdot 6 - 1 \end{cases} \text{så} \begin{cases} 1 = 2 \cdot 6 - 11 = 2(105 - 9 \cdot 11) - \\ -11 = 2 \cdot 105 - 19 \cdot 11 \end{cases} \text{och} \quad \begin{aligned} 11^{-1} &= -19 = 105 - 19 = \\ &= 86 \text{ i } \mathbb{Z}_{105}. \end{aligned}$$

Svar: a) Bara 11 och 13 är inverterbara, b) $\mathbf{11^{-1} = 86}$ i $\mathbb{Z}_{105}$ (och $\mathbf{13^{-1} = 97}$).

---

2) (3p) Man har 16 kort, varav 6 är svarta och 10 har andra, alla olika, färger. På hur många sätt kan de 16 korten ordnas, så att inga svarta kort ligger intill varandra? De svarta korten betraktas som identiska.
(Svaret får innehålla fakulteter, heltalspotenser och de fyra vanliga räknesätten.)

De önskade ordningarna beskrivs entydigt av de kulörta kortens ordning (10! st) och valet av vilka 6 av de 11 platserna före, mellan och efter dem som skall ha ett svart kort ($\binom{11}{6} = \frac{11!}{6! \cdot 5!}$ möjliga). Multiplikationsprincipen ger
Svar: Antalet sådana ordningar är $\frac{11! \cdot 10!}{6! \cdot 5!}$ (= 1676505600).

---

3) (3p) Permutationerna $\alpha, \beta \in S_7$, gruppen av permutationer av $\{1, 2, \ldots, 7\}$,

$$\alpha(1) = 6,\ \alpha(2) = 5,\ \alpha(3) = 2,\ \alpha(4) = 7,\ \alpha(5) = 3,\ \alpha(6) = 1,\ \alpha(7) = 4,$$
$$\beta(1) = 5,\ \beta(2) = 7,\ \beta(3) = 6,\ \beta(4) = 4,\ \beta(5) = 3,\ \beta(6) = 1,\ \beta(7) = 2.$$

Ange på cykelform **a)** α^{-1}, **b)** det π som uppfyller $\alpha\pi\alpha^{-1} = \beta$ och **c)** alla element i H, den minsta delgruppen till S_7 som innehåller α.

---

a) $\alpha^{-1}(1) = 6$, ty $\alpha(6) = 1$, etc. ger $\alpha^{-1} = (16)(235)(47)$.
b) $\alpha\pi\alpha^{-1} = \beta$ gäller precis om $\pi = \alpha^{-1}\beta\alpha$.
Eftersom $\beta = (1536)(27)$ fås $\pi = (\alpha^{-1}(1)\alpha^{-1}(5)\alpha^{-1}(3)\alpha^{-1}(6))(\alpha^{-1}(2)\alpha^{-1}(7)) = (1625)(34)$.
c) $H = \langle\alpha\rangle = \{id, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$, cykliska gruppen som genereras av α.
Man finner $H = \{id,\ (16)(253)(47),\ (235),\ (16)(47),\ (253),\ (16)(235)(47)\}$.
Svar: a) $\boldsymbol{\alpha^{-1} = (16)(235)(47)}$, b) $\boldsymbol{\pi = (1625)(34)}$,
c) $\boldsymbol{H = \{id,\ (16)(253)(47),\ (235),\ (16)(47),\ (253),\ (16)(235)(47)\}}$.

---

4) (3p) Låt $f(x, y, z, w) = x\bar{y}\bar{z} + yz\bar{w} + \bar{x}yw + \bar{x}zw + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{y}z\bar{w}$. Uttryck den booleska funktionen $f(x, y, z, w)$ på **minimal disjunktiv form**, dvs disjunktiv form med så få '·' och '+' som möjligt (även underförstådda '·' räknas.)

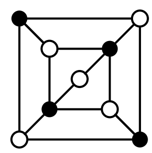
Uttrycket för f ger karnaughdiagrammet härintill.
Genom att, som i fig., täcka 1:orna med så få och stora rektanglar som möjligt med sidlängder 1, 2 eller 4, får vi att $f(x, y, z, w)$ är ekvivalent med $z\bar{w} + \bar{x}w + \bar{y}\bar{z}$.
Svar:
Uttrycket blir $\boldsymbol{f(x, y, z, w) = z\bar{w} + \bar{x}w + \bar{y}\bar{z}}$.

$\boldsymbol{xy}$ \ $\boldsymbol{zw}$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	1
10	1	1	0	1

---

5) (3p) Har vidstående graf någon hamiltoncykel? Ge exempel eller motivera varför ingen finns.

Grafen innehåller inte någon hamiltoncykel, ty den är bipartit (se fig.) och har inte lika många hörn av varje färg, men på en hamiltoncykel måste färgerna komma varannan, så de svarta hörnen måste vara lika många som de vita. **Svar: Nej.**



---

6) (4p) Vad blir (den minsta icke-negativa) resten då $19^{8^{2009}}$ $(= 19^{(8^{2009})})$ divideras med 13?

Eftersom 13 är primtal och $13 \nmid 19$ ger Fermats lilla sats att $19^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. $8^2 = 64 \equiv 4$, $8^3 \equiv 8 \cdot 4 \equiv 8 \pmod{12}$ etc ger att $8^{2009} \equiv 8 \pmod{12}$, så $8^{2009} = 8 + 12k$, något $k \in \mathbb{N}$.
Det ger $19^{8^{2009}} = 19^{8+12k} = 19^8 \cdot (19^{12})^k \equiv 6^8 \cdot 1^k \equiv 36^4 \equiv (-3)^4 = 81 \equiv 3 \pmod{13}$, så
Svar: Den minsta icke-negativa resten är 3.

7) (4p) Låt G vara en grupp, H en delgrupp till G och N en normal delgrupp till G, dvs en delgrupp vars vänstersidoklasser också är högersidoklasser ($gN = Ng$ för alla $g \in G$).
Visa att $HN (= \{hn \mid h \in H,\ n \in N\})$ är en delgrupp till G.

Enligt en känd sats är $M \subseteq G,\ M \neq \varnothing$, en delgrupp till G omm $x, y \in M \Rightarrow xy,\ x^{-1} \in M$. $x, y \in HN \Rightarrow x = h_1 n_1,\ y = h_2 n_2$ för några $h_i \in H,\ n_i \in N$, så $xy = h_1 n_1 h_2 n_2 = h_1 h_2 n_3 n_2$, $x^{-1} = n_1^{-1} h_1^{-1} = h_1^{-1} n_4 \in HN$ (ty $Nh_2 = h_2 N$ ger att $n_1 h_2 = h_2 n_3$ för något $n_3 \in N$ och motsvarande $n_1^{-1} h_1^{-1} = h_1^{-1} n_4$ för något $n_4 \in N$). $HN \neq \varnothing$, ty $1 \in H, N$ ger $1 = 1 \cdot 1 \in HN$, så HN är en delgrupp. **Saken är klar.**

---

8) Låt som vanligt fibonaccitalen $F_n,\ n \in \mathbb{N}$, definieras av

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ för alla } n \in \mathbb{N}.$$

a) (2p) Visa för $s = 1, 2, 3, \ldots$ att $F_{r+s} = F_{r+1} F_s + F_r F_{s-1}$ för alla $r \in \mathbb{N}$.
b) (2p) Visa att $F_m \mid F_{km}$ för alla $k,\ m \in \mathbb{N}$. (Även ogjord får a) användas här.)

a) Induktion över s. Låt $P(s)$ vara påståendet för ett givet $r \in \mathbb{N}$.
Bas: $P(1)$ är sann, ty $F_{r+1} = F_{r+1} \cdot 1 + F_r \cdot 0 = F_{r+1} F_1 + F_r F_0$.
$P(2)$ är sann ty $F_{r+2} = F_{r+1} \cdot 1 + F_r \cdot 1 = F_{r+1} F_2 + F_r F_1$.
Steg: Antag $P(i)$ och $P(i+1)$ för ett $i \geq 1$. Vi skall visa $P(i+2)$.
$F_{r+(i+2)} = F_{(r+i)+2} = F_{(r+i)+1} + F_{r+i} = F_{r+(i+1)} + F_{r+i} \overset{\text{IA}}{=} F_{r+1} F_{i+1} + F_r F_i + F_{r+1} F_i + F_r F_{i-1} = F_{r+1}(F_{i+1} + F_i) + F_r(F_i + F_{i-1}) = F_{r+1} F_{i+2} + F_r F_{i+1}$, dvs $P(i+2)$ sant.
Enligt induktionsprincipen är $P(s)$ sant för $s = 1, 2, \ldots$ **Saken är klar.**
Alernativt: Visa $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ och betrakta 12-elementet i $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{r+s} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^r \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^s$.
b) Vi visar för varje m med induktion att $F_m \mid F_{km}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$
Bas: För $k = 0$ är påståendet det sanna $F_m \mid F_0 (= 0)$.
Steg: Antag att $F_m \mid F_{im}$. Vi skall visa $F_m \mid F_{(i+1)m}$.
Enligt a) är $F_{(i+1)m} = F_{im+m} = F_{im+1} F_m + F_{im} F_{m-1}$, så $F_m \mid F_{(i+1)m}$ (ty $F_m \mid F_m, F_{im}$).
Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för $k = 0, 1, 2, \ldots$ **Saken är klar.**

---

9) (5p) Person A drar 3 gånger ett tal bland $\{1, 2, 3\}$ och B drar 4 gånger bland $\{1, 2, 3, 4\}$. De olika talen i varje dragning är lika sannolika och dragningarna är oberoende.
Vad är sannolikheten att A har (strikt) fler 1:or än B? Att B har fler än A?
(Svaren får innehålla fakulteter, heltalspotenser och de fyra vanliga räknesätten.)

A kan få k st 1:or på $2^{3-k}\binom{3}{k}$ sätt ((antalet möjligheter för övriga $3-k$)$\cdot$(antalet möjliga lägen för 1:orna)), dvs antalen sätt att få $0, 1, 2, 3$ st 1:or är 8, 12, 6, 1. Motsvarande för B är $3^{4-k}\binom{4}{k}$ sätt, dvs antalen sätt att få $0, 1, 2, 3, 4$ st 1:or är 81, 108, 54, 12, 1.
A kan då få (strikt) fler 1:or än B på $12 \cdot 81 + 6 \cdot (81 + 108) + 1 \cdot (81 + 108 + 54) (= 2349)$ sätt och B kan få fler 1:or på $108 \cdot 8 + 54 \cdot (8 + 12) + 12 \cdot (8 + 12 + 6) + 1 \cdot (8 + 12 + 6 + 1) (= 2283)$ sätt. (Additions- och multiplikationsprinciperna.) Totala antalet möjliga utfall är $3^3 \cdot 4^4 (= 6912)$, så
Svar: Sannolikheterna är $\frac{2349}{6912} (\approx 0,3398)$ och $\frac{2283}{6912} (\approx 0,3303)$.

---

10) (5p) Låt $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$ vara mängder med $\bigcup_{i=1}^{10} B_i = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ och $|B_1| = 12$, $1 \leq |B_i| \leq 11$ för $i = 2, 3, \ldots, 10$.
Visa att det för $i = 1, 2, \ldots 10$ finns $c_i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ med $c_i \equiv i \pmod{10}$, så att för något $\pi \in S_{10}$ gäller $c_i \in B_{\pi(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Låt $A_1 = \{1, 11, \ldots, 91\}$, $A_2 = \{2, 12, \ldots, 92\}$, $\ldots$, $A_{10} = \{10, 20, \ldots, 100\}$ och betrakta den bipartita grafen med 10 hörn märkta A_i och 10 hörn märkta B_j och en kant mellan A_i och B_j precis om $A_i \cap B_j \neq \varnothing$.
För $k = 1, 2, \ldots, 9$ gäller då om $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ att $|B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_{k-1}}| \leq |B_{i_1}| + \cdots + |B_{i_{k-1}}| \leq 12 + 11\,(k-2) = 11\,k - 10 < 10\,k$, så från k st A_i:n finns totalt minst en kant till (minst ett element gemensamt med) åtminstone k av B_j:na (de k A_i:na innehåller ju $10\,k$ element). Detsamma gäller för $k = 10$, ty alla $B_j \neq \varnothing$ och $\bigcup_{i=1}^{10} A_i = \{1, 2, \ldots, 100\}$.
Enligt Halls sats finns en fullständig matchning i grafen. Låt den matcha A_i med $B_{\pi(i)}$ och $c_i \in A_i \cap B_{\pi(i)}$. Dessa c_i:n har tydligen de önskade egenskaperna. **Saken är klar.**