KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i kursen
SF1610(/5B1118), DISKRET MATEMATIK för CL, IT, Media (m.fl.)
onsdagen den 19 augusti 2009, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E(/3), krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Betygen A–E gäller för **kurs SF1610** och betygen 3–5 gäller för **kurs 5B1118** (normalt de som varit registrerade på kursen före läsåret 2007/08).

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 12p** totalt, får Fx(/K) och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.
OBS! För godkänd tentamen krävs minst 12p på denna del (+3p).

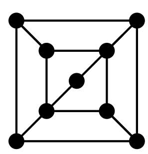
1a) (1p) Vilka av elementen 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15 i $\mathbb{Z}_{105}$ är inverterbara?
b) (2p) Bestäm en av (de existerande) inverserna i a).

2) (3p) Man har 16 kort, varav 6 är svarta och 10 har andra färger, alla olika. På hur många sätt kan de 16 korten ordnas, så att inga svarta kort ligger intill varandra? De svarta korten betraktas som identiska.
(Svaret får innehålla fakulteter, heltalspotenser och de fyra vanliga räknesätten.)

3) (3p) Permutationerna $\alpha, \beta \in S_7$, gruppen av permutationer av $\{1, 2, \ldots, 7\}$,
$\alpha(1) = 6,\ \alpha(2) = 5,\ \alpha(3) = 2,\ \alpha(4) = 7,\ \alpha(5) = 3,\ \alpha(6) = 1,\ \alpha(7) = 4,$
$\beta(1) = 5,\ \beta(2) = 7,\ \beta(3) = 6,\ \beta(4) = 4,\ \beta(5) = 3,\ \beta(6) = 1,\ \beta(7) = 2.$
Ange på cykelform **a)** α^{-1}, **b)** det π som uppfyller $\alpha\pi\alpha^{-1} = \beta$ och **c)** alla element i H, den minsta delgruppen till S_7 som innehåller α.

4) (3p) Låt $f(x, y, z, w) = x\bar{y}\bar{z} + yz\bar{w} + \bar{x}yw + \bar{x}zw + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{y}z\bar{w}$. Uttryck den booleska funktionen $f(x, y, z, w)$ på **minimal disjunktiv form**, dvs disjunktiv form med så få '$\cdot$' och '$+$' som möjligt (även underförstådda '$\cdot$' räknas.)

5) (3p) Har vidstående graf någon hamiltoncykel?
Ge exempel eller motivera varför ingen finns.



Vänd!

DEL II

6) (4p) Vad blir (den minsta icke-negativa) resten då $19^{8^{2009}} (= 19^{(8^{2009})})$ divideras med 13?

7) (4p) Låt G vara en grupp, H en delgrupp till G och N en normal delgrupp till G, dvs en delgrupp vars vänstersidoklasser också är högersidoklasser ($gN = Ng$ för alla $g \in G$).
Visa att $HN(= \{hn \mid h \in H,\ n \in N\})$ är en delgrupp till G.

8) Låt som vanligt fibonaccitalen F_n, $n \in \mathbb{N}$, definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{alla } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

a) (2p) Visa för $s = 1, 2, 3, \ldots$ att $F_{r+s} = F_{r+1}F_s + F_rF_{s-1}$ för alla $r \in \mathbb{N}$.
b) (2p) Visa att $F_m \mid F_{km}$ för alla $k,\ m \in \mathbb{N}$. (Även ogjord får a) användas här.)

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (5p) Person A drar 3 gånger ett tal bland $\{1, 2, 3\}$ och B drar 4 gånger bland $\{1, 2, 3, 4\}$. De olika talen i varje dragning är lika sannolika och dragningarna är oberoende.
Vad är sannolikheten att A har (strikt) fler 1:or än B? Att B har fler än A?
(Svaren får innehålla fakulteter, heltalspotenser och de fyra vanliga räknesätten.)

10) (5p) Låt $B_1,\ B_2, \ldots, B_{10}$ vara mängder med $\bigcup_{i=1}^{10} B_i = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ och $|B_1| = 12,\ 1 \leq |B_i| \leq 11$ för $i = 2, 3, \ldots, 10$.
Visa att det för $i = 1, 2, \ldots 10$ finns $c_i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ med $c_i \equiv i \pmod{10}$, så att för något $\pi \in S_{10}$ gäller $c_i \in B_{\pi(i)},\ i = 1, 2, \ldots, 10$.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.