KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i kursen
SF1610(/5B1118), DISKRET MATEMATIK för CL, Media (m.fl.)
måndagen den 31 maj 2010, klockan 9.00–14.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E(/3), krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Betygen A–E gäller för **kurs SF1610** och betygen 3–5 gäller för **kurs 5B1118** (normalt de som varit registrerade på kursen före läsåret 2007/08).

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 12p** totalt, får Fx(/K) och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Se kurssidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontrollskrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.
OBS! För godkänd tentamen krävs minst 12p på denna del (+3p).

1) (3p) Finn $\mathrm{sgd}(392, 462)$ och heltal m, n så att $392m+462n = \mathrm{sgd}(392, 462)$.
(sgd kallas i boken gcd.)

2) (3p) Högst 100 identiska guldmynt skall delas ut till 20 (särskiljbara) barn, så att var och en får minst ett mynt. På hur många sätt kan det ske? Det totala antalet mynt som delas ut kan vara allt från 20 till 100.
(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra vanliga räknesätten.)

3) Låt G vara gruppen $(U(\mathbb{Z}_{30}), \cdot)$, dvs de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{30}$ med operationen multiplikation.
a) (1p) Ange alla element i G.
b) (2p) Är G en cyklisk grupp? Finn i så fall ett genererande element för G.

4) (3p) En linjär binär kod ges av kontrollmatrisen $H = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$.
a) (1p) Vilket kodord kan med högst ett fel bli 1010101?
b) (2p) Finn x, y så att $10xy001$ är ett kodord.

5) (3p) Grafen $G = (V, E)$ är sammanhängande och reguljär (dvs alla hörn har samma valens (grad)) och har 147 hörn, $|V| = 147$. Avgör (med motivering) om G måste vara eulersk (dvs ha en eulerkrets).

Vänd!

DEL II

6) (4p) Visa att $371 \mid 7n^{53} + 53n^7 - 60n$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. $(371 = 7 \cdot 53.)$

7) Låt A och B vara (icke-tomma) mängder och f en funktion, $f : A \to B$. Vi säger att f har en **vänsterinvers** om det finns $g : B \to A$ så att den sammansatta funktionen $g \circ f = id_A$, där $id_A : A \to A$ är identitetsfunktionen på A, $id_A(a) = a$ för alla $a \in A$.
a) (1p) Har $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, där $s(n) = n + 1$ för $n \in \mathbb{N}$, någon vänsterinvers?
b) (3p) Finn ett enkelt nödvändigt och tillräckligt villkor för att $f : A \to B$ skall ha en vänsterinvers.

8) (4p) Visa att en sammanhängande graf där varje hörn har valens (grad) minst 4 och alla cykler har längd minst 4, inte kan vara planär.

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Man har n st svarta, inte särskiljbara, kulor och $2n+1$ st med andra, olika, färger och väljer (oordnat) ut n st av dem.
a) (2p) Visa att antalet sätt det kan ske är

$$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n}.$$

b) (3p) Ge (med motivering) ett slutet uttryck för summan i a). Uttrycket får bara innehålla n, heltal, potenser och de fyra vanliga räknesätten.
(Man får göra b) utan att ha gjort a).)

10) Låt $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ och A vara en delmängd till X, $A \subseteq X$.
Låt $H \subseteq S_n$ bestå av de permutationer av X som tar alla element i A till element i A, $H = \{\pi \in S_n \mid \pi(a) \in A$ för alla $a \in A\}$.
a) (2p) Visa att H är en delgrupp till S_n.
b) (1p) Om $|A| = m$, vad är $|H|$, H:s ordning (uttryckt i m och n)?
c) (2p) Beskriv H:s vänstersidoklasser $\tau H = \{\tau\pi \mid \pi \in H\}$ och högersidoklasser $H\tau$ (för $\tau \in S_n$).

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.
Där kommer så småningom också en kursenkät, fyll i den!