KTH Matematik
B.Ek

Lösningar tentan SF1610(/5B1118) DISKRET MATEMATIK, CL m.fl., 18 augusti 2010 Tryckfel kan förekomma.

1) Betrakta ekvationerna $15x \equiv a \pmod{21}$ för $a = 5,\ 6,\ 7,\ 8$.
a) (1p) Ange vilken eller vilka av dem som är lösbara (med x heltal, förstås).
b) (2p) Finn alla lösningar för den eller en av de lösbara ekvationerna.

För $a = 5, 7, 8$ gäller $3 \nmid (15x - a)$, så $21 \nmid (15x - a)$ och ekvationen saknar lösningar.
$15x \equiv 6 \pmod{21} \Leftrightarrow 5x \equiv 2 \pmod{7}$, man ser (ev. med Euklides algoritm) att $1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$, så $2 = 5 \cdot 6 - 4 \cdot 7$ och $x = 6$ är en lösning då $a = 6$. Eftersom $\text{sgd}(5, 7) = 1$ ges alla lösningar av $x = 6 + 7k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Svar a: Bara lösbar för $a = 6$, b: Alla lösningar ges då av $x = 6 + 7k,\ k \in \mathbb{Z}$.

---

2) (3p) 15 kvinnor och 10 män skall ut och cykla tillsammans. De har 8 damcyklar, 8 herrcyklar och 9 ”unisex-cyklar” att tillgå.
På hur många sätt kan cyklarna fördelas bland deltagarna om ingen man skall ha en damcykel och ingen kvinna skall ha en herrcykel?

Damcyklarna kan fördelas bland kvinnorna på $(15)_8 = \frac{15!}{7!}$ sätt (antalet injektioner från en 8-mängd till en 15-mängd) och herrcyklarna bland männen på $(10)_8 = \frac{10!}{2!}$ sätt. Sedan kan unisex-cyklarna fördelas på $9!$ sätt bland de ännu cykellösa. Multiplikationsprincipen ger
Svar: De kan fördelas på $\frac{15!10!9!}{7!2}$(= 1708303948775424000000) sätt.

---

3) Permutationen $\alpha \in S_9$ (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \ldots, 9\}$) ges av
$\alpha(1)=7,\ \alpha(2)=5,\ \alpha(3)=2,\ \alpha(4)=6,\ \alpha(5)=9,\ \alpha(6)=4,\ \alpha(7)=8,\ \alpha(8)=1,\ \alpha(9)=3.$
a) (1p) Ange α och α^{-1} på cykelform.
b) (2p) Finn på cykelform ett $\beta \in S_9$ så att $\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta$ (dvs $\alpha^{-1} = \beta\alpha\beta^{-1}$).

$\alpha(1) = 7$, $\alpha(7) = 8, \ldots$ ger $\alpha = (178)(2593)(46)$ och då $\alpha^{-1} = (187)(2395)(46)$ (α ”baklänges”).
$\beta\alpha\beta^{-1} = (\beta(1)\beta(7)\beta(8))(\beta(2)\beta(5)\ldots)(\ldots)$. Det blir α^{-1} om man t.ex. låter $\beta(1) = 1$, $\beta(7) = 8$, $\beta(8) = 7$, $\beta(2) = 2$, $\beta(5) = 3, \ldots$, så
Svar a: $\alpha = (178)(2593)(46)$, $\alpha^{-1} = (187)(2395)(46)$, b: T.ex. $\beta = (35)(78)$.

---

4) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}_{17}$ så att (räknat i $\mathbb{Z}_{17}$, förstås) $12x^{16} + 3x = 0$.

Två fall. $x = 0$ är tydligen en lösning. Om $x \neq 0$ gäller enligt Fermats lilla sats att $x^{16} = 1$ i $\mathbb{Z}_{17}$, så ekvationen blir då $12 + 3x = 0$. $3^{-1} = 6$ i $\mathbb{Z}_{17}$, så enda lösningen i det fallet är $x = 3^{-1} \cdot (-12) = 6 \cdot 5 = 13$. **Svar: Ekvationens alla lösningar är $x = 0$, 13.**

---

5) (3p) Grafen G har kromatiska talet $\chi(G) = n$ och är sådan att om en ny kant (dvs en kant mellan två hörn som inte är grannar i G) läggs till G, ökar det kromatiska talet.
Visa att antalet hörnfärgningar av G med n färger är $n!$ (dvs $P_G(n) = n!$).

I en minimal färgning måste varje par av hörn som inte är grannar ha samma färg (annars skulle samma färgning duga med en kant till). Det finns alltså n st mängder av hörn som måste ha samma färg, olik de andras, i minimala färgningar. En minimal färgning innebär precis en fördelning av de n färgerna på dessa, så det finns $n!$ sådana. **Saken är klar.**

---

6) (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt av $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ och $a_0 = 3,\ a_1 = 8$. Vi skall visa att $a_n = 2^n + 2 \cdot 3^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$

Induktionsbevis (med påståendet $P(n) : a_n = 2^n + 2 \cdot 3^n$ **och** $a_{n+1} = 2^{n+1} + 2 \cdot 3^{n+1}$).
Bas: $a_0 = 3 = 2^0 + 2 \cdot 3^0$, $a_1 = 8 = 2^1 + 2 \cdot 3^1$, (så $P(0)$ sant) **basen klar.**
Steg: Antag att $a_k = 2^k + 2 \cdot 3^k$ och $a_{k+1} = 2^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1}$ (dvs $P(k)$ sant)
Då fås $a_{k+2} = 5(2^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1}) - 6(2^k + 2 \cdot 3^k) = (5 \cdot 2 - 6)2^k + 2(5 \cdot 3 - 6)3^k = 2^{k+2} + 2 \cdot 3^{k+2}$ (så $P(k + 1)$ sant), **steget klart.**
Induktionsprincipen ger påståendet för alla $n \in \mathbb{N}$, **saken är klar.**

---

7) (4p) Låt $f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{w} + \bar{y}\bar{z}w + \bar{y}zw + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yw + xzw + x\bar{y}\bar{z}\bar{w}$. Uttryck den booleska funktionen $f(x,y,z,w)$ på **minimal disjunktiv form**, dvs disjunktiv form med så få '$\cdot$' och '+' som möjligt (även underförstådda '$\cdot$' räknas.)

Uttrycket för f ger karnaughdiagrammet härintill.
Genom att, som i fig., täcka 1:orna med så få och stora rektanglar som möjligt med sidlängder 1, 2 eller 4, får vi att $f(x,y,z,w)$ är ekvivalent med $x\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{w} + yzw$.
Svar:
Uttrycket blir $f(x,y,z,w) = x\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{w} + yzw$.

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

---

8) 17 stolar står på rad bredvid varandra.
a) (1p) På hur många sätt kan 13 barn sätta sig på dem (högst ett barn på varje)?
b) (1p) Hur många sätt om två av dem (Anna och Bo) inte får sitta på stolar intill varandra?
c) (2p) Om inga av Anna, Bo och Cecilia får sitta på stolar intill varandra?

Låt X vara mängden av möjliga placeringar. Då är $|X|$ = antalet injektioner (olika barn på olika stolar) från en 13-mängd (barnen) till en 17-mängd (stolarna) $= (17)_{13} = \frac{17!}{4!}$.
Låt C vara mängden placeringar där Anna och Bo sitter bredvid varandra. Då är antalet där de inte gör det $|X \setminus C| = |X| - |C|$. Men $|C| = 2 \cdot (16)_{12} = 2\,\frac{16!}{4!}$ (2 ordningar mellan Anna och Bo, de båda ses som ett stort barn av 12, då finns totalt 16 positioner).
Med A, B mängderna placeringar där Bo och Cecilia respektive Anna och Cecilia sitter jämte varandra är antalet där inga av dem gör det (principen om inklusion och exklusion) $|X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) - |A \cap B \cap C|$. Som i b) är $|A| = |B| = |C| = 2\,\frac{16!}{4!}$, medan $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 2 \cdot (15)_{11} = 2\,\frac{15!}{4!}$ (om Cecilia sitter bredvid både Anna och Bo, sitter de tre i rad med Cecilia i mitten, 2 möjliga sätt, som ett extra stort barn av 11, totalt 15 positioner) och $|A \cap B \cap C| = 0$ (om Cecilia sitter bredvid Anna och Bo, sitter Anna inte bredvid Bo).
Svar : Antalen tillåtna placeringar är a: $\frac{17!}{4!}$(= 14820309504000), b: $\frac{17!}{4!} - 2\,\frac{16!}{4!}$(= $10 \cdot 15!$ = 13076743680000), c: $\frac{17!}{4!} - 6\,\frac{16!}{4!} + 6\,\frac{15!}{4!} - 0$(= $182\,\frac{15!}{4!}$ = 9916530624000).

---

9) Låt G vara en ändlig grupp och H, K delgrupper till G. $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$.
a) (2p) Visa att om $|H \cap K| = 1$ är $|HK| = |H| \cdot |K|$.
b) (3p) Visa allmänt att $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

Låt $H \times K$ vara produkt**mängden** av H och K, $\{(h,k) \mid h \in H,\ k \in K\}$. Funktionen $\varphi : H \times K \to HK$ given av $\varphi(h,k) = hk$ är en surjektion (definitionen av HK).
Om $\varphi(h,k) = \varphi(h',k')$ för $h, h' \in H,\ k, k' \in K$, dvs $hk = h'k'$, är $h'^{-1}h = k'k^{-1} \in H \cap K$, dvs $h' = hg^{-1}$, $k' = gk$ för ett $g \in H \cap K$. Omvänt ger alla $g \in H \cap K$ så olika h', k' med $\varphi(h,k) = \varphi(h',k')$, så precis $|H \cap K|$ olika element i $H \times K$ tas av φ till varje element i HK och (multiplikationsprincipen) $|HK| \cdot |H \cap K| = |H \times K| = |H| \cdot |K|$. **Saken är klar.**

---

10) Vi kallar en polyeder **enkel** om grafen av dess hörn och kanter är isomorf med en plan graf vars ytor (fasetter) motsvarar polyederns begränsningsytor.
Låt **defekten** (krökningen) i hörn j i en polyeder, κ_j, vara vinkeln som "fattas" om man plattar ut hörnet, dvs $\kappa_j = 2\pi -$(summan av vinklarna vid det hörnet, för alla ytor som möts där).
Descartes formel säger att summan av alla hörnens defekter i en enkel polyeder är 4π, $\boldsymbol{\sum_j \kappa_j = 4\pi}$.
a) (1p) Visa Descartes formel då polyedern är en tetraeder.
b) (4p) Visa formeln i det allmänna fallet.

Låt α_{ij} vara vinkeln i sida i vid hörn j (0 om hörn j inte ligger vid sida i). Då är $\kappa_j = 2\pi - \sum_i \alpha_{ij}$ och $\sum_j \kappa_j = \sum_j 2\pi - \sum_j \sum_i \alpha_{ij} = 2\pi v - \sum_i \sum_j \alpha_{ij} = 2\pi v - \sum_i (n_i - 2)\pi = 2\pi(v - e + r) = 4\pi$, där v, e, r är antalen hörn, kanter och ytor, medan n_i är antalet kanter i sida i. (Vi har använt $\sum_i n_i = 2e$ och Eulers polyederformel.) **b-Saken är klar** (och a följer ur b).
