KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i kursen
SF1610(/5B1118), DISKRET MATEMATIK för CL, Media (m.fl.)
onsdagen den 18 augusti 2010, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

För **godkänt betyg**, dvs minst E(/3), krävs **dels** minst 12p på del I, **dels** totalpoäng enligt följande.

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

Betygen A–E gäller för **kurs SF1610** och betygen 3–5 gäller för **kurs 5B1118** (normalt de som varit registrerade på kursen före läsåret 2007/08).

Den som inte blivit godkänd, men fått **minst 12p** totalt, får Fx(/K) och därmed rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Se kurs-sidan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

Var och en av uppgifterna i denna del svarar mot kontroll-skrivningen med samma nummer.

Godkänd kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på uppgiften och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du har klarat.
OBS! För godkänd tentamen krävs minst 12p på denna del (+3p).

1) Betrakta ekvationerna $15x \equiv a \pmod{21}$ för $a = 5, 6, 7, 8$.
a) (1p) Ange vilken eller vilka av dem som är lösbara (med x heltal, förstås).
b) (2p) Finn alla lösningar för den eller en av de lösbara ekvationerna.

2) (3p) 15 kvinnor och 10 män skall ut och cykla tillsammans. De har 8 dam-cyklar, 8 herrcyklar och 9 ”unisex-cyklar” att tillgå.
På hur många sätt kan cyklarna fördelas bland deltagarna om ingen man skall ha en damcykel och ingen kvinna skall ha en herrcykel?
(Svaret får innehålla fakulteter, heltalspotenser och de fyra vanliga räknesätten.)

3) Permutationen $\alpha \in S_9$ (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \dots, 9\}$) ges av $\alpha(1)=7$, $\alpha(2)=5$, $\alpha(3)=2$, $\alpha(4)=6$, $\alpha(5)=9$, $\alpha(6)=4$, $\alpha(7)=8$, $\alpha(8)=1$, $\alpha(9)=3$.
a) (1p) Ange α och α^{-1} på cykelform.
b) (2p) Finn på cykelform ett $\beta \in S_9$ så att $\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta$ (dvs $\alpha^{-1} = \beta\alpha\beta^{-1}$).

4) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}_{17}$ så att (räknat i $\mathbb{Z}_{17}$, förstås)

$$12x^{16} + 3x = 0.$$

5) (3p) Grafen G har kromatiska talet $\chi(G) = n$ och är sådan att om en ny kant (dvs en kant mellan två hörn som inte är grannar i G) läggs till G, ökar det kromatiska talet.
Visa att antalet hörnfärgningar av G med n färger är $n!$ (dvs $P_G(n) = n!$).

Vänd!

DEL II

6) (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt av

$$\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, & n = 0, 1, 2, \ldots \\ a_0 = 3, \ a_1 = 8. \end{cases}$$

Visa att $a_n = 2^n + 2 \cdot 3^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$

7) (4p) Låt $f(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{y}\bar{w} + \bar{y}\bar{z}w + \bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yw + xzw + x\bar{y}\bar{z}\bar{w}$. Uttryck den booleska funktionen $f(x, y, z, w)$ på **minimal disjunktiv form**, dvs disjunktiv form med så få '$\cdot$' och '$+$' som möjligt (även underförstådda '$\cdot$' räknas.)

8) 17 stolar står på rad bredvid varandra.
a) (1p) På hur många sätt kan 13 (särskiljbara) barn sätta sig på dem (med högst ett barn på varje stol)?
b) (1p) På hur många sätt går det om två av dem (Anna och Bo) inte får sitta på stolar intill varandra?
c) (2p) På hur många sätt går det om inga av Anna, Bo och Cecilia får sitta på stolar intill varandra?
(Svaren får innehålla fakulteter, heltalspotenser och de fyra vanliga räknesätten.)

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Låt G vara en ändlig grupp och H, K delgrupper till G. Låt som vanligt $HK = \{hk \mid h \in H, \ k \in K\}$.
a) (2p) Visa att om $|H \cap K| = 1$ är $|HK| = |H| \cdot |K|$.
b) (3p) Visa allmänt att

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

10) Vi kallar en polyeder (en kropp med (ändligt många) plana begränsningsytor, i sin tur begränsade av polyederns kanter och hörn) **enkel** om grafen av dess hörn och kanter är isomorf med en plan graf vars ytor (fasetter) motsvarar polyederns begränsningsytor.
Låt **defekten** (krökningen) i hörn j i en polyeder, κ_j, vara vinkeln som "fattas" om man plattar ut hörnet, dvs $\kappa_j = 2\pi -$(summan av vinklarna vid det hörnet, för alla ytor som möts där).
Descartes formel säger att summan av alla hörnens defekter i en enkel polyeder är 4π,

$$\sum_j \boldsymbol{\kappa_j = 4\pi.}$$

a) (1p) Visa Descartes formel då polyedern är en tetraeder (dvs dess ytor är fyra trianglar (inte säkert liksidiga)).
b) (4p) Visa formeln i det allmänna fallet.
Utan bevis får användas att summan av vinklarna i en n-hörning är $(n-2)\pi$.

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.